
Vorkurs Physik: Übung 11

Wintersemester 2012/13

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs12.html

1. Radioaktiver Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz sei anfangs ($t = 0$) eine Menge $m(0) = m_0 = 10$ Masseneinheiten vorhanden. Nach t Tagen ist ihr Bestand auf $m(t) = m_0 e^{-\beta t}$ zerfallen mit der Zerfallskonstanten $\beta = 0.02$.

- Wann wird nur noch die Hälfte der Substanz vorhanden sein?
- Welche Menge zerfällt im Laufe des ersten Tages, welche im Verlauf des 30. Tages?
- Wie viel Prozent der jeweils vorhandenen Substanz zerfällt im Lauf des 1. bzw. 30. Tages?
- Welche der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben sind von der konkreten Wahl für m_0 abhängig?

2. Rechenregeln für Logarithmen

- Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ bzw. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$:

$$1) \quad \ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$2) \quad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$3) \quad \ln(A^m) = m \cdot \ln(A)$$

- Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

3. Trigonometrische Funktionen

- Rechnen Sie um!

$$\text{ins Bogenmass:} \quad 1) 30^\circ, \quad 2) 90^\circ, \quad 3) 270^\circ, \quad 4) 72^\circ$$

$$\text{in Grad:} \quad 5) \frac{\pi}{3}, \quad 6) \frac{3\pi}{2}, \quad 7) \frac{\pi}{4}, \quad 8) 1, 79.$$

- Skizziere den Verlauf der Funktion $y(x) = 3 \sin(2x - 1)$.

c) Bestimme die Periode der folgenden Funktionen:

$$1) \quad 3 \sin \left(3x + \frac{1}{4} \right), \quad 2) \quad \cos(4\pi x).$$

d) Wie lautet die Gleichung der Sinuskurve mit der Amplitude 4 und der Periode $\frac{\pi}{2}$?

4. Trigonometrische Funktionen II

a) Vereinfache folgende Ausdrücke:

$$1) \quad \cos^2 \varphi \cdot \tan^2 \varphi + \cos^2 \varphi \quad 2) \quad 1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \quad 3) \quad \frac{1}{1 - \sin \varphi} + \frac{1}{1 + \sin \varphi}$$

b) Zeigen Sie

$$1. \quad \sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi \quad \text{bzw.} \quad \cos(2\phi) = 2 \cos^2 \phi - 1,$$

$$2. \quad \sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2 \sin \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} \cos \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2}.$$

mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \pm \cos \phi_1 \cdot \sin \phi_2, \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \mp \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2. \end{aligned}$$

5. Zusatzaufgabe: Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen.