Prof. Dr. S. Schlemmer Prof. Dr. A. Schadschneider

Vorkurs Physik: Übung 15

Wintersemester 2012/13 `www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs12.html`

Hinweis: *Die Aufgaben sind zum Selbststudium gedacht. Die Lösungen finden Sie in den nächsten Tagen der Homepage zur Vorlesung.*

1. Imaginäre Zahlen

a) Vereinfache mit Hilfe der imaginären Einheit i:

a) $\sqrt{4-7}$ *b)* $\sqrt{-144}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-4}}$ *d)* $\sqrt{4(-25)}$

b) Berechne:

a) i^8 *b)* i^{15} *c)* i^{45} *d)* $(-i)^3$ *e)* i^{-2}

2. Komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3i - 2$.
a) Gebe jeweils den Real- und Imaginärteil an!
b) Stelle die Zahlen in der komplexen Ebene dar!
c) Bestimme die Beträge und die komplex-konjugierten Zahlen!
d) Berechne die Summe und das Produkt der beiden Zahlen!
e) Bestimme den Real- und Imaginärteil von $\frac{z_1}{z_2}$!

3. Komplexe Zahlen II

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} \ .$$

b) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ die reellen Zahlen a und ϕ so, dass $z = a \exp(i\phi)$.

d) Finden Sie alle Werte von $\sqrt[5]{-1}$.

e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

4. Komplexe Zahlen III

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

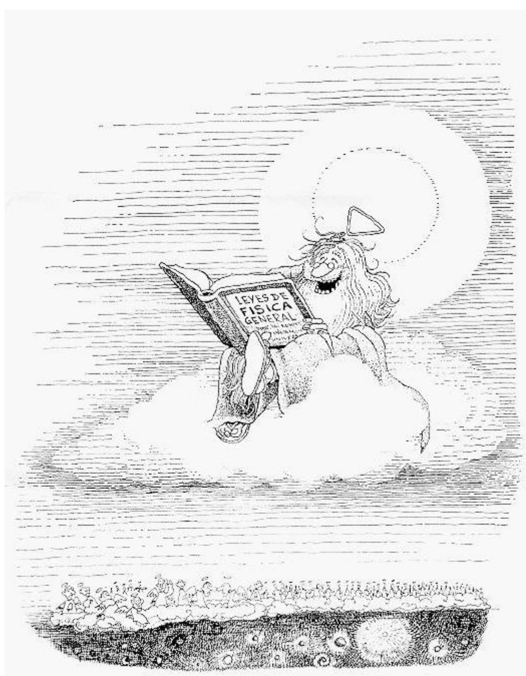
a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

b) $\sin z = -i \sinh(iz)$ bzw. $\cos z = \cosh(iz)$.

c) $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$. (Formel von Moivre)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für $\cos 2\alpha$ bzw. $\sin 2\alpha$ sowie $\cos 3\alpha$ bzw. $\sin 3\alpha$.

— The End —



Wir wünschen Ihnen viel Erfolg im Studium!