
Vorkurs Physik: Übung 3

Sommersemester 2014

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs14.html

8. Potenzfunktion

a) Berechne

$$(i) : 3^4, \quad (ii) : 2^{-3}, \quad (iii) : 16^{1/4}, \quad (iv) : 64^{-1/4}.$$

b) Zeige ausgehend von

$$x^A \cdot x^B = x^{A+B}, \quad (x^A)^B = x^{A \cdot B} \quad \text{und} \quad x^0 = 1$$

(wobei $x \in \mathbb{R}^+$ und $A, B \in \mathbb{R}$), dass

$$x^{-A} = \frac{1}{x^A}.$$

9. Radioaktiver Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz sei anfangs ($t = 0$) eine Menge $m(0) = m_0 = 10$ Masseneinheiten vorhanden. Nach t Tagen ist ihr Bestand auf $m(t) = m_0 e^{-\beta t}$ zerfallen mit der Zerfallskonstanten $\beta = 0.02$.

- Wann wird nur noch die Hälfte der Substanz vorhanden sein?
- Welche Menge zerfällt im Laufe des ersten Tages, welche im Verlauf des 30. Tages?
- Wie viel Prozent der jeweils vorhandenen Substanz zerfällt im Lauf des 1. bzw. 30. Tages?
- Welche der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben sind von der konkreten Wahl für m_0 abhängig?

10. Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen *sinus hyperbolicus* und *cosinus hyperbolicus* sind durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definiert.

- Skizzieren Sie den Verlauf der Funktionen! Wie verhalten sie sich für $x \rightarrow \pm\infty$?

b) Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion folgende Beziehungen:

$$1. \sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \text{bzw.} \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$2. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$3. \sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$4. \cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

11. Rechenregeln für Logarithmen

a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ bzw. $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$:

$$1) \quad \ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$$

$$2) \quad \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$3) \quad \ln(A^m) = m \cdot \ln(A)$$

b) Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

12. Zusatzaufgabe: Gebrochen-rationale Funktionen

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Null- und Polstellen der gebrochen-rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

und fertigen Sie eine qualitative Skizze des Graphen an.