
Andreas Schadschneider

Mathematische Methoden der Physik

Version: 21. Mai 2007

Wintersemester 2006/07

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Mathematische Grundlagen der Experimentalphysik | 9 |
| 1 | Vektoren | 11 |
| 1.1 | Vektorräume | 12 |
| 1.2 | Vektoralgebra | 13 |
| 1.3 | Basis eines Vektorraumes | 15 |
| 1.4 | Koordinatensysteme | 16 |
| 1.4.1 | Kartesische Koordinaten | 16 |
| 1.4.2 | (Ebene) Polarkoordinaten | 17 |
| 1.4.3 | Zylinderkoordinaten | 17 |
| 1.4.4 | Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) | 18 |
| 2 | Lineare Gleichungssysteme und Matrizen | 21 |
| 2.1 | Matrizen | 21 |
| 2.2 | Determinanten | 24 |
| 2.3 | Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme | 27 |
| 2.3.1 | Gauß-Algorithmus | 27 |
| 2.3.2 | Cramersche Regel | 29 |
| 3 | Komplexe Zahlen | 31 |
| 3.1 | Definition und Rechenregeln | 31 |
| 3.2 | Komplexe Ebene | 32 |
| 3.3 | Eulersche Formel | 34 |
| 3.4 | Wurzeln | 35 |
| 4 | Funktionen und Differentiation | 37 |
| 4.1 | Eigenschaften von Funktionen | 37 |
| 4.2 | Elementare Funktionen | 40 |
| 4.2.1 | Potenzfunktion | 40 |
| 4.2.2 | Exponentialfunktion | 41 |
| 4.2.3 | Logarithmus | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.4 | Trigonometrische Funktionen | 44 |
| 4.3 | Differentiation | 49 |
| 4.4 | Potenzreihen und Taylor-Entwicklung | 52 |
| 4.4.1 | Potenzreihen | 52 |
| 4.4.2 | Taylor-Entwicklung | 52 |
| 5 | Integration | 55 |
| 5.1 | Stammfunktion | 55 |
| 5.2 | Bestimmtes Integral | 56 |
| 5.3 | Integrationsverfahren | 58 |
| 5.3.1 | Partielle Integration | 59 |
| 5.3.2 | Substitutionsregel | 60 |
| 5.3.3 | Ableitung nach Parameter | 61 |
| 5.4 | Uneigentliche Integrale | 62 |
| 5.4.1 | Integration über ein unbeschränktes Intervall | 63 |
| 5.4.2 | Integration über Polstellen | 64 |
| 6 | Differentialgleichungen | 65 |
| 6.1 | Klassifikation von DGL | 65 |
| 6.2 | Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten | 66 |
| 6.2.1 | Homogener Fall | 66 |
| 6.2.2 | Inhomogener Fall | 69 |
| 6.3 | Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung | 70 |
| 6.3.1 | Homogener Fall | 70 |
| 6.3.2 | Inhomogener Fall | 71 |
| 6.4 | Nichtlineare DGL | 72 |
| 6.4.1 | DGL mit getrennten Variablen | 72 |
| 6.4.2 | Bernoulli-Gleichung | 73 |
| 7 | Vektoranalysis | 75 |
| 7.1 | Partielle Ableitung und totales Differential | 76 |
| 7.2 | Gradient | 78 |
| 7.3 | Divergenz | 80 |
| 7.4 | Rotation | 82 |
| 8 | Wegintegral und mehrdimensionale Integration | 85 |
| 8.1 | Wegintegrale | 85 |
| 8.2 | Wegunabhängigkeit und Potential | 88 |
| 8.3 | Mehrdimensionale Integrale | 90 |
| 8.4 | Integration in krummlinigen Koordinaten | 92 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| II | Mathematische Grundlagen der Theoretischen Physik | 97 |
| 9 | Die Integralsätze von Gauß und Stokes | 99 |
| 9.1 | Flächenintegrale und Vektorfluss | 99 |
| 9.2 | Der Greensche Satz in der Ebene | 101 |
| 9.3 | Integraldarstellung der Rotation | 104 |
| 9.4 | Integralsatz von Stokes | 105 |
| 9.5 | Integraldarstellung der Divergenz | 106 |
| 9.6 | Gaußscher Satz | 108 |
| 10 | Fourierreihen und Integraltransformationen | 111 |
| 10.1 | Funktionenräume | 111 |
| 10.1.1 | Metrische und normierte Räume | 111 |
| 10.1.2 | Skalarprodukt | 112 |
| 10.2 | Fourierreihen | 113 |
| 10.3 | Fourier-Transformation | 119 |
| 10.3.1 | Delta-Funktion | 123 |
| 10.3.2 | Faltungintegral | 124 |
| 10.3.3 | Anwendung: DGL | 125 |
| 10.4 | Laplace-Transformation | 127 |
| 11 | Koordinatensysteme | 129 |
| 11.1 | Gebräuchliche Koordinatensysteme | 129 |
| 11.1.1 | Zylinderkoordinaten | 131 |
| 11.1.2 | Kugelkoordinaten | 132 |
| 11.2 | Bestimmung von Vektorkomponenten | 133 |
| 11.3 | Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten | 136 |
| 11.3.1 | Gradient | 136 |
| 11.3.2 | Divergenz | 137 |
| 11.3.3 | Rotation | 138 |
| 11.3.4 | Laplace-Operator | 139 |
| 11.4 | Bogen-, Flächen-, Volumenelemente | 140 |
| 11.4.1 | Raumkurven | 140 |
| 11.4.2 | Flächen- und Volumenelemente | 141 |
| 12 | Operatoren und Eigenwerte | 143 |
| 12.1 | Eigenwerte von Matrizen | 143 |
| 12.1.1 | Theoreme zum Eigenwertproblem | 148 |
| 12.2 | Operatoren | 148 |
| 12.3 | Eigenwertproblem für Operatoren | 151 |
| 12.4 | Operatoren in der Quantenmechanik | 152 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 13 | Differentialgleichungen II | 155 |
| 13.1 | Systeme von Differentialgleichungen | 155 |
| 13.1.1 | Lineare Differentialgleichungssysteme | 156 |
| 13.1.2 | Dynamische Systeme | 158 |
| 13.2 | DGL als Eigenwertproblem | 159 |
| 13.3 | Spezielle DGL | 161 |
| 13.3.1 | Legendre'sche DGL | 161 |
| 13.3.2 | Kugelflächenfunktionen | 162 |
| 13.3.3 | Bessel'sche DGL | 164 |
| 13.3.4 | Hermite'sche DGL | 165 |
| 13.3.5 | Laguerre'sche DGL | 165 |
| 13.4 | Partielle DGL | 165 |
| 13.4.1 | Wichtige pDGL der Physik | 166 |
| 13.5 | Lösungsverfahren für pDGL; Green'sche Funktionen | 167 |
| 13.5.1 | Integraldarstellung | 168 |
| 13.5.2 | Integraltransformation | 168 |
| 13.5.3 | Green'sche Funktion | 169 |
| 13.5.4 | Separation der Variablen | 171 |
| 14 | Symmetrien und Gruppen | 173 |
| 14.1 | Symmetrien | 173 |
| 14.2 | Gruppen | 174 |
| 14.3 | Konjugations- und Nebenklassen | 175 |
| 14.3.1 | Äquivalenzrelationen | 175 |
| 14.3.2 | Konjugationsklassen | 176 |
| 14.3.3 | Nebenklassen | 176 |
| 14.4 | Spezielle Untergruppen | 177 |
| 14.5 | Wichtige Gruppen | 177 |
| 14.5.1 | Permutationsgruppe | 177 |
| 14.5.2 | Matrixgruppen | 178 |
| 14.6 | Darstellungen | 180 |
| 14.7 | Kontinuierliche Gruppen | 181 |
| 14.8 | Generatoren und Lie-Algebra | 182 |
| 15 | Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik | 185 |
| 15.1 | Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie | 185 |
| 15.1.1 | Kolmogorow-Axiome | 187 |
| 15.1.2 | Bedingte Wahrscheinlichkeiten | 188 |
| 15.1.3 | Gleichverteilte Elementarwahrscheinlichkeiten und Kombinatorik | 190 |
| 15.2 | Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen | 191 |
| 15.2.1 | Erwartungswerte und Momente | 194 |
| 15.3 | Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen | 195 |
| 15.3.1 | Gleichverteilung | 195 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 15.3.2 | Binomialverteilung | 196 |
| 15.3.3 | Poisson-Verteilung | 198 |
| 15.3.4 | Normalverteilung (Gauß-Verteilung) | 199 |
| 15.4 | Zentraler Grenzwertsatz | 200 |
| 16 | Funktionentheorie | 205 |
| 16.1 | Komplexe Differenzierbarkeit | 205 |
| 16.1.1 | Cauchy-Riemann-Bedingungen | 206 |
| 16.1.2 | Potenzreihen | 207 |
| 16.2 | Komplexe Wegintegrale und Integralsatz von Cauchy | 207 |
| 16.2.1 | Komplexe Wegintegrale | 207 |
| 16.2.2 | Integralsatz von Cauchy | 208 |
| 16.3 | Integralformel von Cauchy | 210 |
| 16.3.1 | Laurentreihen | 212 |
| 16.4 | Residuensatz | 213 |
| 17 | Tensorrechnung | 219 |
| 17.1 | Definition | 219 |
| 17.2 | Rechenregeln für Tensoren | 222 |
| 17.3 | Differentialoperationen und Tensoren | 223 |