12. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

1. Stetigkeit

In der Vorlesung haben Sie folgende Definition für Stetigkeit kennengelernt:

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ ist stetig an der Stelle } x_0 \in D \;:\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition:

a) Die Heaviside-Funktion

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ a & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ unstetig an der Stelle 0.

b) Die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist für $a, b, c \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

2. Quotientenregel

a) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ausgehend von der Produkt- und Kettenregel.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x)$.

3. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen (bzgl. x) von:

a) $\dfrac{x^2+3}{x+2}$ b) a^x c) $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e) $\sin(x)\cos(x)$ f) $e^{x \sin x}$ g) $\cosh x$ h) $\sinh x$

4. Ableitung von Umkehrfunktionen

$\overset{-1}{f}$ sei die Umkehrfunktion von f, d.h. $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

$$(\overset{-1}{f})' = \frac{1}{f' \circ \overset{-1}{f}}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitungen von:

a) $f(x) = \ln(x)$ b) $f(x) = \arctan(x)$ c) $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

Hinweis: Vereinfachen Sie die Resultate in (b) und (c) so weit, dass keine trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen mehr darin vorkommen.