4. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

Definition:

Das *Vektorprodukt* von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist wie folgt definiert: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$

1. Aufgabe

Berechnen Sie das Vektorprodukt folgender Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Aufgabe

Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b) $(\lambda\, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\, \vec{b}) = \lambda\, (\vec{a} \times \vec{b})$ (λ ist eine reelle Zahl)

c) $(\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{a} = 0$

d) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$

e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$ ('bac-cab'-Regel)

3. Aufgabe

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ sollen am Koordinatenursprung gespiegelt werden (*Punktspiegelung*) in die Vektoren $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ und $(\vec{a} \times \vec{b})'$. Vergleichen Sie die Vektoren $(\vec{a} \times \vec{b})'$ und $\vec{a}' \times \vec{b}'$. Was fällt auf?

4. Aufgabe

Betrachten Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einmal mittels des Vektorproduktes und alternativ mit Hilfe des Skalarproduktes.

b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Vergleichen Sie das Ergebnis mit $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

5. Aufgabe

Betrachten Sie das durch $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{a} \cdot \vec{x} = c$ gegebene Gleichungssystem.

a) Berechnen Sie $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $c = 4$.

b) Für Experten: Bestimmen Sie mit Hilfe der 'bac-cab'-Regel $\vec{x}$ für allgemeine $\vec{a}$, $\vec{b}$ und c. Welche Voraussetzung müssen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen, damit das Gleichungssystem lösbar ist.