5. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

Definitionen:

1. Eine $m \times n$-Matrix A ist ein Schema, bestehend aus $n \cdot m$ Einträgen a_{ij}, angeordnet in m Zeilen (indiziert durch i) und n Spalten (indiziert durch j):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Die Determinante einer $n \times n$-Matrix A, gekennzeichnet durch das Symbol $|A|$, ist wie folgt definiert:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\,|A_{1n}|.$$

Hierbei sei die Matrix A_{kl} dadurch gegeben, dass man die k. Zeile und l. Spalte aus der Matrix A streicht. A_{kl} ist somit eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix. Die zugehörige Determinante $|A_{kl}|$ bezeichnet man auch als *Unterdeterminante*. Falls $n = 1$ ist, sei die Determinante das Matrixelement selbst. Die Definition ist also rekursiv. Sie führt eine Determinante n. Grades auf eine Summe von Determinanten des Grades $n - 1$ zurück.

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Determinanten $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Verifizieren Sie auch die Relation

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

2. Aufgabe

Zeigen Sie durch explizites Ausrechnen der Determinante, dass $\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt.

3. Aufgabe

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{c} = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$. Zeigen Sie, dass

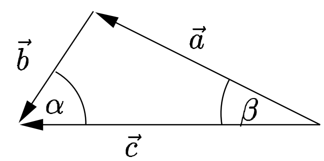
a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (Spatprodukt)

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (Invarianz gegenüber zyklischer Vertauschung)

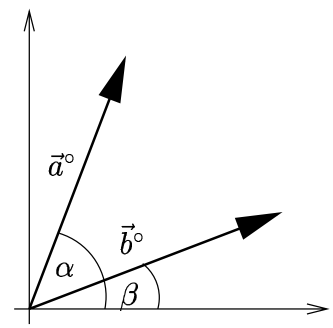
4. Aufgabe

Beweisen Sie

a) den Sinussatz $|\vec{a}|/|\vec{b}| = \sin\alpha/\sin\beta$ für ein ebenes Dreieck mit den Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch Anwendung des Vektorproduktes,



b) das Additionstheorem $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$, indem Sie die Einheitsvektoren $\vec{a}^\circ = \vec{a}/|\vec{a}|$ und $\vec{b}^\circ = \vec{b}/|\vec{b}|$ vektoriell miteinander multiplizieren. Nutzen Sie auch die Darstellung $\vec{a}^\circ = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2$ und $\vec{b}^\circ = \cos\beta\,\vec{e}_1 + \sin\beta\,\vec{e}_2$ aus.
HINWEIS: Es genügt, wenn der Winkel $\measuredangle(\vec{a}^\circ, \vec{b}^\circ) = \alpha - \beta$ im Bereich $0^\circ \leq \alpha - \beta \leq 180^\circ$ angenommen wird.



5. Aufgabe

Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(2,1,1)$, $B(2,3,0)$ und $C(4,3,1)$. Projizieren Sie das Dreieck in die Koordinatenebenen, und zeigen Sie, dass das Quadrat der Dreiecksfläche gleich ist der Summe der Quadrate der drei Projektionsflächen.