8. Übung zum Vorkurs Physik

Wintersemester 2005/2006

1. Funktionen

a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$ sowie die Bildmengen $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ an und untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

1) $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ 2) $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- , \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ , \end{cases}$

3) $f : D \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto |x|$ 4) $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

b) Ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ eingeschränkt auf ihre Bildmenge, d.h. $\tilde{f} : D \to f(D)$, surjektiv?

2. Monotonie

a) Welche der folgenden Funktionen ist monoton, welche sogar streng monoton?

1) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3$ 4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

b) Zeige: Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Ist umgekehrt auch jede injektive Funktion streng monoton?

3. Umkehrfunktion

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit?

b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

4. Stetigkeit

Untersuchen Sie anhand der Graphen folgender Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob sie stetig sind:

1) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

5. Potenzfunktion

Zeigen Sie ausgehend von $x^A \cdot x^B = x^{A+B}$, $(x^A)^B = x^{A \cdot B}$ und $x^0 = 1$ (wobei $x \in \mathbb{R}^+$ und $A, B \in \mathbb{R}$), dass $x^{-A} = \frac{1}{x^A}$ gilt.