

Ein kurzer Überblick über die verschiedenen Teilgebiete der Physik, mit der mathematischen Methode, die dort jeweils benutzt werden

Mechanik

- Differentialgleichungen (DGL)
- Vektoren

Relativitätstheorie und Kosmologie

- Vektoren und Tensoren

Elektrodynamik

- DGL
- Vektoranalysis
- Green'sche Funktionen

Thermodynamik

- Differential

Quantenmechanik

- DGL
- lineare Algebra

Mikrologie

- DGL
- lineare Algebra

Quantenfeldtheorie

- Gruppen Theorie
- Funktionentheorie
- Green'sche Funktionen

Geologie

- Gruppen Theorie
- DGL
- Statistik

Dabei handelt es sich nicht lediglich um Rechnen, also um Techniken ein konkretes Problem zu lösen, sondern um die Formulierung der grundlegenden Physik in einem passenden mathematischen Formalismus.

Beispiel: $m \frac{d^2}{dt^2} \underline{x}(t) = \underline{F}(\underline{x}, t)$

2^{te} Newtonsche Gesetze; beschreibt die Dynamik eines punktförmigen Teilchens unter der Kraft $\underline{F}(\underline{x}, t)$
Funktion ↗

• Differentialgleichung Kraft = Masse * Beschleunigung

• $\underline{F}, \underline{x}$ sind Vektoren im dreidimensionalen Raum

Dass Theorien (hier: Mechanik) mit bestimmten mathematischen Werkzeugen (hier: DGL, Vektoren) (effizient) beschrieben werden können ist schon eine wichtige und nichttriviale Aussage über die ^{Theorie}selbst. 0.1

Ohne Kenntnis von DGL, Vektoren lässt sich also schon die grundlegende Gleichung der Mechanik nicht formulieren oder verstehen - vom Berechnen von Lösungen dieser Gleichung ganz zu schweigen: Allein die Aussage "Kraft lässt sich beschreiben durch einen Vektor in 3D" enthält implizit physikalische Aussagen, die man nur versteht, wenn man sehr genau weiß, was ein "Vektor" ist.

Umgekehrt treten mathematische Konzepte oft in unterschiedlichen und überraschenden Zusammenhängen auf; z. B. ist der Zustand eines Quantensystems durch einen Zustandsvektor (nicht in 3D) beschreibbar.

Daher lohnt es sich

- i) die grundlegenden mathematischen Definitionen gut zu verstehen (+Entwickeln einer "Intuition")
- ii) die daraus resultierenden Rechenmethoden gut zu verstehen und zu beherrschen

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die mathematische Methode, die zur Formulierung der Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik und Thermodynamik nötig sind.

- zum Teil, ohne daß Sie die Physik dazu schon kennen (Entwicklung an Beispielen)
- oft ohne Beweise (mit Hinweis wo sie leicht zu finden sind, oft nicht möglich, bemühe mich trotzdem um Motivierung und Anschaulichkeit)
- meist ohne mathematische Rigorosität

Protokoll ist ein großes Pensum zu bewältigen, und ich bin auf Ihre Mithilfe angewiesen

- Nacharbeiten der Vorlesung
- Lektüre von Büchern (Vorstellen)
- Übungen
- Fragen: Konfliktforum, Forum, Übungsgruppenleiter, Übungsleiter, mich

4. Vektorräume und lineare Algebra

Das mathematische Objekt, das "Vektor" genannt wird, wird zur Beschreibung der unterschiedlichsten physikalischen Größen verwendet, z.T. aus der Schule bekannt

- Ortsvektor \underline{x} (von einem gewählten Ursprung aus)
 - Geschwindigkeitsvektor \underline{v} (Verschiebung eines Punktes pro Zeit)
 - elektrisches Feld \underline{E}
- } Größe mit Richtung

zum Teil nicht

- Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschreibt ein Quantensystem
- Funktionen als Vektoren

Es bestehen tiefe mathematische Zusammenhänge zwischen den (physikalisch) sehr unterschiedlichen Anwendungen, die eine recht abstrakte und zunächst ungewohnte Definition des Vektorbegriffs erforderlich machen. Die "Definition" "Vektoren sind Größen mit Richtung" langt dazu leider nicht:

- wie ist "Richtung" definiert?
- Kern des Vektorbegriffs ist, dass man Vektoren addieren kann und mit bestimmten Objekten multiplizieren kann und dabei wieder neue Vektoren erhält. Sind diese Operationen für eine physikalische Größe sinnvoll, kann man sie prinzipiell durch Vektoren beschreiben. ("Richtung" ist also nicht Kern der Sache.)

4.1 Definition (Axiome)

Ein Vektorraum über den reellen Zahlen \mathbb{R} ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Verknüpfungen

$$V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$$

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v, w \in V)$$

mit folgenden Eigenschaften

1. $(V, +)$ ist eine Gruppe, d.h. $(v+w)+z = v+(w+z)$, $\exists e: e+v = v \forall v$ (Nulldekt) $\forall v \exists -v: v+(-v) = e$

2. $v+w = w+v \forall w, v$ (kommutativ)

3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ "

5. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

6. $1v = v$ $\forall v \in V$

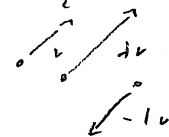
Bemerkungen:

- Die Elemente der Menge V werden als Vektoren v bezeichnet, $v \in V$
- Verkürzend spricht man oft vom Vektorraum V und meint $(V, +, \cdot)$
- statt "über der reellen Zahl \mathbb{R} " kann man Vektorräume auch "über \mathbb{C} " definieren, dann können Vektoren mit komplexen Zahlen multipliziert werden, oder über noch allgemeineren Objekten (genannt Körper).
- wir schreiben $u-v$ für $u+(-v)$ und v/λ für $(\frac{1}{\lambda})v$, zusätzlich zur Addition (von Vektoren) und Multiplikation (mit Zahlen) sind also auch Subtraktion und Division definiert.
- gelten die Axiome auch für eine Untermenge $U \subset V$ mit $u, u_2 \in U$ für $u, u_2 \in U$ spricht man von einem Untervektorraum

Verschiebung im Raum

können addiert werden (Verschiebung v_1 , dann $v_2 =$ erst v_2 dann v_1)

können mit einer reellen Zahl multipliziert werden



} ergibt jeweils eine Verschiebung
1
hervor

n -Tupel reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

können addiert werden $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

und multipliziert $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

} ergibt jeweils einen neuen n -Tupel

Funktionen $f(x)$

$f(x) + g(x)$

$\lambda f(x)$

} ergibt neue Funktionen

-Lösungen einer homogenen linearen DGL $Lx = 0$

$\frac{x+y}{ax}$

} sind neue Lösungen der DGL \square

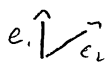
4.2 Basissysteme

Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ nennt man Erzeugendensystem von V , wenn man jeden Vektor v schreiben kann als

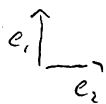
$$v = \underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n}_{\text{Linearkombination von Vektoren}} \quad v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$$

z.B. Verschiebung in 2D

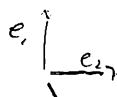
("Erzeugendensystem spannt die Ebene auf")



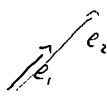
i)



ii)



iii)



iv)

ist kein Erzeugendensystem

Vektoren $e_1, \dots, e_n \in V$ sind linear unabhängig, wenn gilt:

Sei $\underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n = 0}_{\text{wird Linearkombination genannt}}$, dann folgt $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$

d.h. wenn man keinen der Vektoren als Summe der restlichen schreiben kann

("kein Vektor ist unnützlich", vgl. iii)

(bei linear unabhängige Vektoren ist kein eine LK des anderen, sonst $e_1 = v_2 e_2 + v_3 e_3 + \dots$ als $e_1 - v_2 e_2 - v_3 e_3 = 0$)

Vektoren e_1, e_2, \dots, e_n heißen Basis wenn sie ein Erzeugendensystem und

linear unabhängig sind. Sind e_1, \dots, e_n eine Basis, dann kann

jeder Vektor v auf einzigartige Weise als Summe $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ dargestellt werden

Beweis: i) e_1, \dots, e_n ist ein Erzeugendensystem (d.h. jeder Vektor kann als Summe über v_i geschrieben werden)

ii) wäre die Darstellung nicht einzigartig, d.h. $v = \sum v_i e_i = \sum \bar{v}_i e_i$ mit $v_i \neq \bar{v}_i$ für wenigstens ein e_i
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}_i) e_i = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{(v_i - \bar{v}_i)}_{\text{Lineare Unabhängigkeit}} = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \text{Widerspruch}$

Beispiele i) und ii) sind Basen, iii), iv) nicht.

Die Zahl der Basisvektoren n heißt Dimension D eines Vektorraums und ist unabhängig von der Wahl der Basis.

4.3 Darstellung eines Vektors als D-Tupel

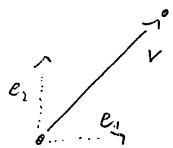
Gegeben eine Basis kann jeder Vektor verdrückt eine (und nur eine) Linearkombination $\sum_{i=1}^D v_i e_i$ geschrieben werden. Dies legt nahe das D-Tupel v_1, v_2, \dots, v_D als Darstellung des Vektors zu verwenden (als sogenannte Koordinaten des Vektors)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix} \equiv \underline{v} \quad \longleftarrow \quad v \quad \text{bei gegebener Basis}$$

Isomorphismen, d.h.
eins-zu-eins Abbildung

Die $v_1, v_2, v_3, \dots, v_D$ heißen Komponenten / des Vektors ^{in Koordinatendarstellung}, oder D-Tupel $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix}$ heißt Spaltenvektor (ist aber nur eine Darstellung des Vektors in einer gegebenen Basis)

┌ Verschiebungsvektor in 2D



$$v = 2e_1 + 2e_2 \quad \text{mit Darstellung} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

└

Eine wichtige Frage ist, wie sich \underline{v} ändert, wenn wir zu einer neuen Basis übergehen. Dazu müssen wir uns mit linearen Abbildungen beschäftigen, was wir auch bald tun werden.

Eine ausgezeichnete Basis ist die Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z mit sogenannten kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.4. Affine Räume

Es mag verwunderlich erscheinen, dass ich als Beispiel für Vektoren oft Verschiebungen genutzt habe, aber noch nicht über Ortsvektoren gesprochen habe. Tatsächlich sind Vektorräume kein befriedigendes Modell für den 3D physikalischen Raum, wir benötigen folgende Erweiterung:

Ein affiner Raum $(M, V, +)$ ist eine Menge von Punkten, ein Vektorraum V und eine Verknüpfung $+$

$$M \times V \rightarrow M \quad (p, v) \mapsto p + v$$

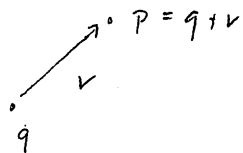
mit den Eigenschaften

$$i) \quad p + (u + v) = (p + u) + v \quad u, v \in V \quad p \in M$$

ii) zu jedem Paar $p, q \in M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$

Kurz: Die Elemente eines affinen Raumes können subtrahiert werden $p - q = v$, ihre Differenz ist ein Vektor (Differenzvektor)

Sie können nicht addiert werden



$p + q ?$

Koordinatensysteme für affine Räume

Ein Koordinatensystem eines affinen Raumes besteht aus einem ausgezeichneten

Punkt p_0 (dem Koordinatenursprung) und einer Basis v_1, \dots, v_n von V .

Jeder Punkt p kann dann als

$$p = p_0 + \sum_i v_i e_i$$

geschrieben werden und wird mit dem Vektor v , bzw. \underline{v} in Koordinatenschreibweise identifiziert. Wichtig: die Identifizierung des physikalischen Raumes mit einem

Vektorraum ist also nur bei gegebenem Koordinatenursprung p möglich

4.5 Normierte Räume

Sei V ein Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\|$ ist eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

mit den Eigenschaften

- i) $\|v\| > 0$ wenn $v \neq 0$
- ii) $\|a \cdot v\| = |a| \|v\|$ $a \in \mathbb{R}$
- iii) Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Ein Vektorraum mit Norm heißt normiert.

□ Skalarprodukt $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ (die euklidische Norm)

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\text{Denn } \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = (\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y})$$

$$= \underline{x} \cdot \underline{x} + 2 \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{y} \cdot \underline{y}$$

$$= \|\underline{x}\|^2 + 2 \underline{x} \cdot \underline{y} + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2 \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2$$

da $\underline{x} \cdot \underline{y} \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$: zu zeigen

$$= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2,$$

somit ist die Dreiecksungleichung erfüllt, i) und ii) kann sich auch leicht zeigen.

Räume mit dieser Norm heißen euklidisch. In einem affinen Raum mit normierten Differenzvektorraum V ist $\|p-q\|$ der Abstand zwischen zwei Punkten.

- in euklidischen Räumen gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

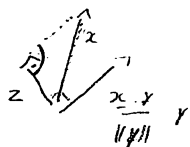
$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$$

Beweis: Sei $y \neq 0$ (sonst ist die Gleichung trivial erfüllt) definieren wir einen zu y orthogonalen Vektor

$$z = \underline{x} - \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y}$$

$$\left(z \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} - \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} - \underline{x} \cdot \underline{y} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{x} = z + \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y}$$



$$\|\underline{x}\|^2 = \underbrace{\|z\|^2}_{\text{Pythagoras}} + \frac{(\underline{x} \cdot \underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^4} \|\underline{y}\|^2 \geq \frac{(\underline{x} \cdot \underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2}$$

$$\Rightarrow (\underline{x} \cdot \underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2$$

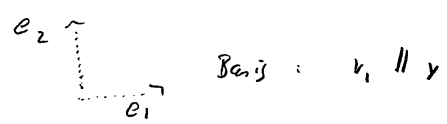
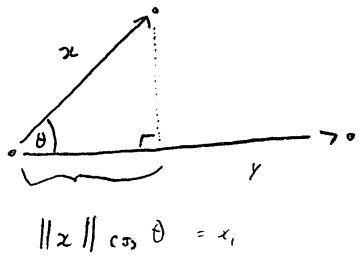
4.6
Gleichheit
bei $z = 0$

- durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann man einen ^{rechten} Winkel θ zwischen zwei Vektoren definieren

$$\frac{(\underline{x} \cdot \underline{y})^2}{(\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|)^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \text{es existiert ein } \theta : \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta$$

- ~~gibt es eine andere Definition des Winkels?~~

Bemerkung: Dieser Weg einen Winkel zu definieren ist natürlich recht absurd, hat aber den Vorteil sehr allgemein zu sein. Dieser Weg ist natürlich konsistent mit der einfachen geometrischen Betrachtung (2D: < Vektoren spannen Ebene)



Basis: v_1, v_2

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \underbrace{x_1 y_1}_{\|\underline{x}\| \cos \theta} + \underbrace{x_2 y_2}_{\|\underline{y}\|}$$

- in der Mathematik gebräuchliche Notation

$$\left\langle \begin{array}{c} \underline{x} \\ \text{Vektor} \end{array}, \begin{array}{c} \underline{y} \\ \text{Darstellung des Vektors} \end{array} \right\rangle = \underline{x} \cdot \underline{y}$$

In der Physik wird auch $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_i x_i y_i = (x_1, x_2, x_3, \dots) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \underline{x}^T \underline{y}$ verwendet

4.6 Linearfunktion und der duale Vektorraum

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \rightarrow f(v)$ mit den Eigenschaften

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(av) = a f(v) \quad \forall u, v \in V, a \in \mathbb{R}$$

heißt Linearfunktion

Die Menge aller Linearfunktionen f bildet einen Vektorraum mit Addition

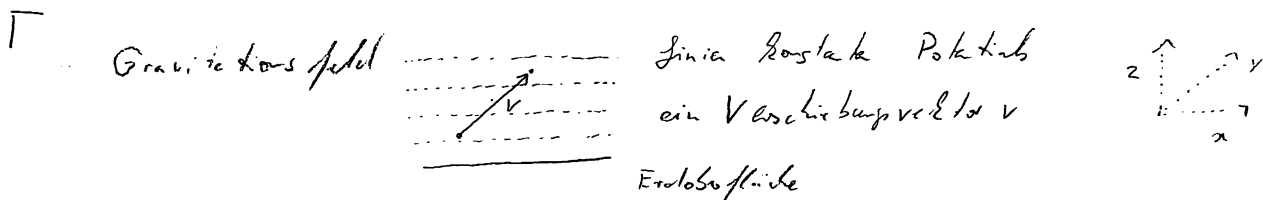
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

und Multiplikation

$$(af)(v) = a f(v)$$

Dieser Raum wird als Dualraum zu V^* bezeichnet.

Diese Definition erscheint zunächst sehr abstrakt. Funktionen, die einem Vektor eine Zahl zuordnen treten jedoch in der Physik sehr häufig auf.



Eine Masse m wird um den Verschiebungsvektor v verschoben.

Die am Masse-Feld verrichtete Energie ist dann

$$E = E(v) = m g v_z$$

Mit $E(u+v) = E(u) + E(v)$ und $E(av) = a E(v)$

erweist sich das (gleichförmige) Gravitationsfeld als Linearfunktion.

Gravitation ist ausserdem linear (experimenteller Befund), d.h.

$$1. \quad \underbrace{(E_1 + E_2)}(v) = E_1(v) + E_2(v)$$

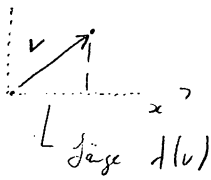
Gravitationsfeld zweier (weit entfernte) Massen \approx näherungsweise gleichförmig)

$$2. \quad \underbrace{(a E)}(v) = a E(v)$$

Gravitationsfeld wenn Stärke des Feldes um a erhöht wird

$\Rightarrow E$ ist ein Element des Dualraums V^* (zu V)

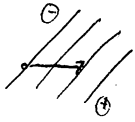
- die Projektion eines Vektors auf eine Raumebene ist eine Linearform



z.B. Projektion auf die x_1 -Achse

Visualisierung: Linearform kann sich als (polarisierte) Ebene sehen

- in 2D



$l(v)$ ist \pm die Zahl der gekreuzten Ebenen

Definition: eine Linearform lässt sich als lineares Objekt denken, das einen Vektor auffrisst und eine Zahl ausspuckt.

Basis: Die Projektion eines Vektors auf eine Raumebene, legt nahe für Linearform diese Projektionen als Basis für Linearformen zu nutzen

also in 2D

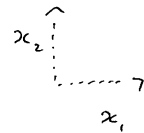


gebildet dx_1

und



dx_2



bezw. $dv_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$

↳ Basisvektoren

und $l = \lambda_1 dv_1 + \lambda_2 dv_2 + \dots$

Zeilendarstellung $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

$$l v = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots$$

Ausblick

- in der Quantenmechanik werden Erwartungswerte zu physikalischen Größen X wie Ort oder Impuls als $\langle \psi | X | \psi \rangle$ berechnet, wobei $|\psi\rangle$ ein Zustandsvektor ist, $\langle \psi |$ ein entsprechendes Element des Dualraums.

- in einem euklidischen Raum lässt sich zu jeder Linearform eindeutig ein Vektor definieren (der senkrecht auf den Ebenen steht). Das Skalarprodukt von diesem Vektor und v ergibt dann die Abbildung auf \mathbb{R} .

Beispiel Gravitationsfeld

$$E = m g \cdot v$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Fundamental betrachtet sind Kräfte jedoch Linearformen, auch wenn die Unterscheidung oft als nicht thematisiert wird (in nicht-euklidischen Räumen ist sie wichtig: SR!) 4.9

4.7 Lineare Abbildungen

Abbildungen sind Funktionen, die Elemente eines Vektorraums auf Elemente eines zweiten Vektorraums abbilden. Wie werden sehen, dass die Darstellung sogenannter linearer Abbildungen in einer gegebenen Basis auf die Matrizenrechnung führt. Dieser Abschnitt bespricht die Grundlagen der Vektorräume.

┌ - Abbildung $x: \mathbb{R} \rightarrow V$ (V sei ein Differenzialvektorraum)
 $t \mapsto x(t)$ Bahnkurve eines Teilchens

- Abbildung $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ (Lineartest)

┌ Eine Abbildung $L: V \rightarrow W$, $v \mapsto w$ ist linear, wenn gilt

$$L(u+v) = Lu + Lv, \quad L(au) = aL(u) \quad u, v \in V, a \in \mathbb{R}$$

wir schreiben $L(v) = Lv$

erhält Skalar des Vektors:

┌ - Multiplikation mit einer Konstanten ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Differentiation ist eine lineare Abbildung vom Raum der (differenzierbaren) Funktionen auf sich selbst. Der Differentialoperator L aus Kapitel 3 ist eine solche Abbildung.

- In der Quantenmechanik sind die Zustandsvektoren $| \psi(t) \rangle$ eines Systems zu unterschiedlichen Zeiten durch eine lineare Abbildung verknüpft:

$$| \psi(t) \rangle = \underbrace{e^{iHt/\hbar}}_{\text{lin. Ab.}} | \psi(0) \rangle$$

┌ Der Kern einer linearen Abbildung sind alle Elemente von V , so dass $Lv = 0$ ist

$$\ker(L) = \{ v \in V \mid Lv = 0 \}$$

┌ Bei einer linearen DGL $Lx = f$ ist der Kern von L der Raum aller Lösungen der homogenen Gleichung $Lx = 0$

Das Bild einer linearen Abbildung $L: V \rightarrow W$ ist definiert durch alle Elemente $w \in W$ die durch $Lv = w$ generiert werden können

$$\text{Im}(L) = \{ w \in W \mid \exists v \in V : Lv = w \}$$

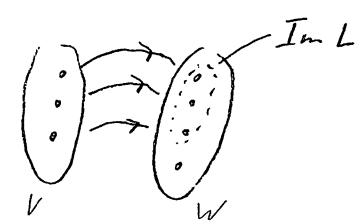


Bild und Kern einer lin. Abb. sind wiederum ein Vektorraum (lineare Kombinationen von Elementen des Bilds/Kerns sind auch Elemente des Bilds/Kerns), die Dimension des Bilds heißt Rang der Abbildung.

4.7.1 Basisdarstellung einer linearen Abbildung $w = Lv$

Stellen wir $v \in V$ und $w \in W$ als Linearkombination von Basisvektoren dar:

$$v = v_1 e_1^v + v_2 e_2^v + \dots + v_n e_n^v \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$w = w_1 e_1^w + w_2 e_2^w + \dots + w_m e_m^w \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

Zunächst fragen wir, wie L auf die n Basisvektoren e_j^v , $j = 1, \dots, n$ wirkt.

$$L e_j^v \in W \Rightarrow L e_j^v = \sum_i L_{ij}^D e_i^w$$

man zähle $\overset{D}{p}$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ eine Zerlegung von Lv_j in m Basisvektoren von W .

Aufgrund der Linearität von L steht damit schon die Wirkung von L auf einen beliebigen $v \in V$ fest:

$$\begin{aligned} \sum_i w_i e_i^w &= w = Lv = L \left(\sum_j v_j e_j^v \right) = \sum_j v_j L e_j^v \\ &= \sum_j v_j \left(\sum_i L_{ij}^D e_i^w \right) = \sum_i \left(\sum_j L_{ij}^D v_j \right) e_i^w \end{aligned}$$

oder $w_i = \sum_j L_{ij}^D v_j$ oder $\underline{w} = \underline{L}^D \underline{v}$

das hier sparsamer-
anschließend eindeutig-
oder

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^D & L_{12}^D & L_{13}^D & \dots \\ L_{21}^D & L_{22}^D & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

mit der Standardregel für Matrixmultiplikation

So wie ein Spaltenvektor die Darstellung eines Vektors in einer gegebenen Basis ist
(Koordinaten bezügl. einer Basis)
 so ist eine Matrix eine Darstellung einer linearen Abbildung in einer Basis.
 Konkrete Rechnungen werden (meist) in einer frei (selbst) gewählten Basis durchgeführt. Hier einige Beispiele:

Verketten von linearen Abbildungen und Matrixmultiplikation

Wir betrachten zwei hintereinander ausgeführte lineare Abbildungen, und zeigen dass ihre Darstellung in einer Basis als Multiplikation der entsprechenden Matrizen entspricht.



$$w_i = \sum_j L_{ij} v_j \quad u_e = \sum_i K_{ei} w_i \quad \text{oder} \quad \underline{u} = \underline{K} \cdot \underline{v} \quad \frac{u}{w} = \underline{K} \cdot \underline{w}$$

$$\Rightarrow u_e = \sum_i K_{ei} \sum_j L_{ij} v_j \equiv \sum_j M_{ej} v_j \quad M_{ej} = \sum_i K_{ei} L_{ij}$$

$$M_{ej} = \sum_i K_{ei} L_{ij}$$

$$\underline{M} = \underline{K} \cdot \underline{L} \quad \text{mit der gewohnten Definition der Matrixmultiplikation}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- Abbildung von Linear Abb. \Rightarrow Übung
- Darstellung von Linearformen

$$\lambda = \sum_i \lambda_i \underbrace{dx_i}_{\substack{\text{Basisform} \\ dx_i = e_i = \delta_{ij}}}$$

Darstellung als "Zeilenform" $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$

$$v = \sum_j v_j e_j$$

Darstellung als "Spaltenvektor" $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda(v) = \sum_i \lambda_i dx_i \left(\sum_j v_j e_j \right) = \sum_{ij} \lambda_i v_j \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i v_i = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt in euklidischen (Hilbert) Räumen

$$\|x\|^2 = \sum_i x_i^2 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

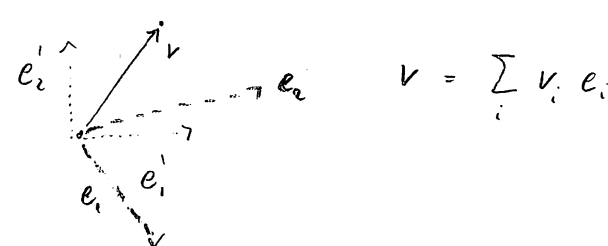
(Wirde 1-1 Beziehung zw. Zeilenform und Vektor, damit auch ein noch genau eingeleitet werden: alle Räume) 4.12

Swap!

- Transponierte L^t einer Abbildung $L: V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{f \in W^*} \mathbb{R}$ $\Rightarrow f \circ L \in V^*$ da Abb. $V \rightarrow \mathbb{R}$
 $L^t f \equiv f \circ L$ ist Abb. $V \rightarrow \mathbb{R}$
 $V^* \xleftarrow{L^t} W^*$
 Darstellung $(L^t)_{ij} = L_{ji}$ ("Spiegelung an der Diagonale")

- Inverse L^{-1} einer Abbildung $V \xrightarrow{L} W$ $v = Lw \Rightarrow w = L^{-1}v$ definiert L^{-1} (so existiert)
 $W \xrightarrow{L^{-1}} V$ in kommutativdiagramm.
 $v = Lw \Rightarrow w = (L^{-1})v = (L^{-1})Lw \quad \forall v, w$
 $\Rightarrow (L^{-1})L = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

- Daraus
 4.7.2 Änderung der Basis
 \Rightarrow Darstellung der Inverse ist Inverse der Darstellung



Was ändert sich, wenn wir von einem Basissystem $\{e_i\}$ in ein anderes $\{e'_i\}$ übergehen?

Wechsel der Basis spielt von großer praktischer Relevanz. In einer schon gewählten ("problemangepassten") Basis kann ein Problem völlig trivial werden, die Lösung also in der Suche nach einer geeigneten Basis liegen. z.B. neues Basissystem könnte orthonormal sein
 $\langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$

Intuition:
 • v ändert sich nicht unter dem Basiswechsel (!!)

$$v = \sum_i v_i e_i \equiv \sum_i v'_i e'_i$$

alte Basis neue Basis

es ändern sich die Komponenten (v_i zu v'_i) und die Basisvektoren (e_i zu e'_i) gleichzeitig, so dass $\sum_i v_i e_i = \sum_i v'_i e'_i$ unverändert bleibt.

Allgemein
 schreibe wie jede der alten Basisvektoren als Linearkombination der neuen Basisvektoren

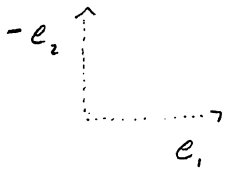
$$e_j = \sum_i S_{ij} e'_i$$

erhalte wir aus

$$v = \sum_j v_j e_j = \sum_{ji} v_j S_{ij} e'_i = \sum_i \left(\sum_j S_{ij} v_j \right) e'_i$$

$$= \sum_i v'_i e'_i \quad \Rightarrow v'_i = \sum_j S_{ij} v_j \quad v' = S \cdot v$$

Beispiele in 2D



$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1' - e_2')$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1' + e_2')$$

$$\Rightarrow e_j = \sum_i S_{ij} e_{j'}$$

gilt $S_{11} = S_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{12} = -S_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = S \underline{v}$$

z.B. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ \rightarrow

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ \uparrow

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ \nearrow

- Drehung in 2D

$$\underline{L}^P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = \underline{L}^P \underline{v}$$

gibt die Änderung der Koordinaten unter einer Drehung des Koordinatensystems. (passive Transformation)

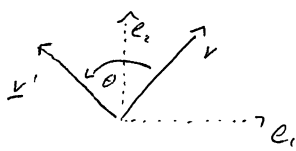
Vergleich

$$\underline{L}^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

gibt die Änderung von \underline{v} an, wenn die Vektoren \underline{v} selbst gedreht werden (aktive Transformation),

$$\underline{v}' = \underline{L}^A \underline{v}$$

Basis, bleibt unverändert



Nachtrag Matrizen und Matrixmultiplikation

Der Ausdruck

$$v_i' = \sum_j S_{ij} v_j$$

lässt sich kompakt als Produkt einer Matrix $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

mit dem Vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ schreiben:

Zusammenfassung als n Gleichung in 1 Gleichung für zwei Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j S_{1j} v_j \\ \sum_j S_{2j} v_j \\ \sum_j S_{3j} v_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} v_1 + S_{12} v_2 + S_{13} v_3 + \dots \\ S_{21} v_1 + S_{22} v_2 + S_{23} v_3 + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \underline{v}$$

$$=: \underline{S} \cdot \underline{v}$$

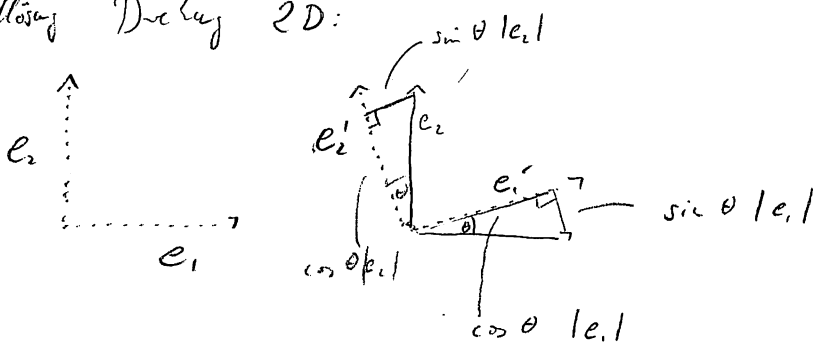
Analog: Matrixmultiplikation

$$M_{es} = \sum_i k_{ei} L_{is}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots \\ L_{21} & L_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } M_{ii} &= \sum_i k_{ii} L_{ii} \\
 &= k_{11} L_{11} + k_{12} L_{21} + k_{13} L_{31} + \dots \\
 &=: \left(\begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} L_{11} \\ L_{12} \\ L_{13} \\ \vdots \end{array} \right) \\
 &\quad \nearrow \\
 &\text{Zeile } k=1 \\
 &\quad \quad \quad \nearrow \\
 &\quad \quad \quad \text{Spalte } j=1
 \end{aligned}$$

Auflösung Drehung 2D:



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow e_1 &= \cos \theta e_1' - \sin \theta e_2' \\
 e_2 &= \sin \theta e_1' + \cos \theta e_2'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vergleich mit } e_j &= \sum_i S_{ij} e_j' \Rightarrow e_1 = S_{11} e_1' + S_{21} e_2' \\
 e_2 &= S_{12} e_1' + S_{22} e_2'
 \end{aligned}$$

$$\text{gilt } S_{11} = \cos \theta$$

$$S_{12} = \sin \theta$$

$$S_{21} = -\sin \theta$$

$$S_{22} = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Achtung: $\underline{v}' = \underline{S} \underline{v}$ gibt Abbildung der Komponenten unter eine Basis Transformation an ("passive Transformation")

$\underline{w} = \underline{L} \cdot \underline{v}$ gibt Transformation von \underline{v} nach \underline{w} an ("aktive Transformation"), Bild von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

\underline{L} kann auch hier eine Drehung sein: $\underline{L} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ Bild von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Drehung in 3D um z-Achse (passiv)

$$\underline{L}^P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und analog für Drehungen um x und y Achse. Drehungen um eine beliebige Achse lassen sich aus sukzessive Drehungen um x, y, z-Achse zusammensetzen.

(Wichtig: endliche Drehungen kommutieren nicht.)

- allgemeine lineare Transformation (passiv)

$$\underline{v}' = \underline{L} \cdot \underline{v}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$\underline{v}'_1 = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \\ L_{23} \\ \vdots \end{pmatrix} \dots$$

$\Rightarrow \underline{L}$ ist die Matrix der Abbildung der Basis-Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$

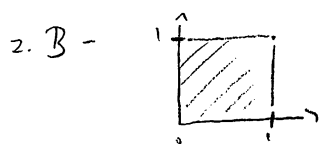
$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{v}'_1 & \underline{v}'_2 & \underline{v}'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

4.8 Die Determinante

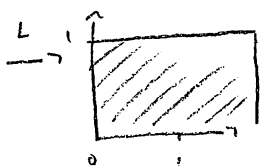
Für die Determinante einer linearen Abbildung, bzw. der Matrix, die die Abbildung darstellt, kann sich verschiedene Definitionen angeben. Daß diese Definitionen äquivalent sind ist eine tiefe Einsicht der linearen Algebra (wird nicht bewiesen, Elemente finden sich leicht in Koenig, v. Wald)

1. Volumenänderung unter LT

1. Die Determinante einer $n \times n$ Matrix \underline{L} ist das vorzeichenbehaftete Volumen der Abbildung des Einheitswürfels (aktive Transformation)

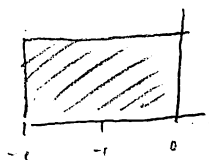


$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det(\underline{L}) = 2$$

- $L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$\det(\underline{L}) = -2$$

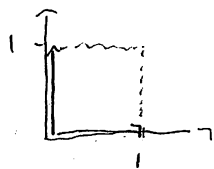
Vorzeichenbehaftet bedeutet, dass wenn sich die Orientierung der Kanten des Einheitswürfels ändert, die Determinante das Vorzeichen ändert. $\det(\underline{L} \cdot \underline{L}_2) = \det(\underline{L}) \det(\underline{L}_2)$ ist eine einfache Konsequenz dieser Definition

- allgemeine lineare Abbildung in 2D $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

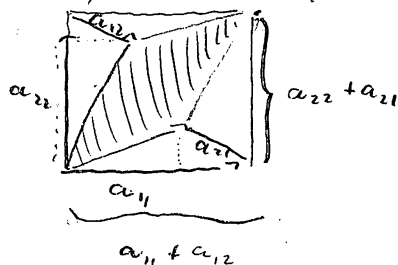
Bild des Einheitswürfels (in 2D: Quadrat) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



$\underline{A} \rightarrow$



$$\begin{aligned} \text{Fläche: } & (a_{11} + a_{12})(a_{22} + a_{21}) - (a_{11} + a_{12})a_{21} - (a_{22} + a_{21})a_{12} \\ & = (a_{11} + a_{12})a_{22} - (a_{22} + a_{21})a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

2. Lineare Algebra

Lineare Gleichungen lassen sich in Matrixform schreiben

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

als $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ etc.

Wann gibt es eine Lösung?

- Beispiel $n=m=2$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \quad | + a_{22}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \quad | + a_{12}$$

Substitution $(a_{11} a_{22} x_1 - a_{12} a_{21}) x_1 = a_{22} b_1 - a_{12} b_2$

$$x_1 = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \text{ analog } x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

\Rightarrow Lösung mit $\underline{b} \neq 0$ existiert nur wenn $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \equiv \det \underline{A} \neq 0$

zu $\underline{b} = 0$ existiert eine Lösung bei der nicht alle $x_i = 0$ sind nur wenn $\det \underline{A} = 0$. ($x_i = 0 \forall i$ ist triviale Lösung)

Lösbarkeit linearer Gleichungen lässt sich geometrisch interpretieren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

\Rightarrow lineare Kombination der Spaltenvektoren ergibt \underline{b}

1. $\underline{b} = 0$

$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = 0$

$\underline{x} \in \ker(\underline{A})$

$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \end{pmatrix}$

- $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ist die einzige Lösung, wenn $\{\underline{a}_i\}$ linear unabhängig sind
- $\underline{x} = 0$ ist einzige Solg, wenn $\det \underline{A} \neq 0$.
- $\Rightarrow \det \underline{A} = 0$ hängt mit der linearen Abhängigkeit

der Spaltenvektoren von \underline{A} zusammen:



Fläche des Parallelogramms ist null, wenn Bildvektoren linear abhängig sind.

2. $\underline{b} \neq 0$: $\{\underline{a}_i\}$ müssen ein Erzeugendensystem sein, damit für jedes $\underline{b} \neq 0$ eine Lösung existiert.

$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$

- $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ wenn $\underline{b} \in \text{Im}(\underline{A})$ existiert eine Lösung (folgt aus Def. des Bildes)

- $n = m$: $\{\underline{a}_i\}$ müssen linear unabhängig sein damit zu jedem \underline{b} eine Lösung existiert $\Leftrightarrow \det \underline{A} \neq 0$

Die Abbildung vom Raum der Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Determinante wenn gilt

i) 'Normalisierung' $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = 1$

ii) 'Multilinearität' $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda c_1 + \mu d_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \lambda c_2 + \mu d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & c_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & d_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & d_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

iii) 'alternierend' $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_1 & \dots & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_2 & & a_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & & & a_{mn} \end{pmatrix} = 0$

d.h. linear abhängige Spaltenvektoren führen zu Determinante null.

i) - iii) sind kompatibel mit intuitiven Vorstellungen von der Volumenänderung; erstaunlich ist, dass sie die Determinante eindeutig festlegen (Beweis: Koenig, v. 1888)

3. Rekursiv : Die Determinante der $n \times n$ Matrix (a) ist a (Vorzzeichenhaft. Volumenänderung)

Schreiben wir eine Matrix \underline{A} mit Zeile i und Spalte j an/ponat als \underline{A}_{ij} , dann ist

$$\det(\underline{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det(\underline{A}_{k1})$$

Beispiele - $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad n=2$

$$\begin{aligned} \det(\underline{A}) &= a_{11} \det(\underline{A}_{11}) - a_{21} \det(\underline{A}_{21}) \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \underline{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

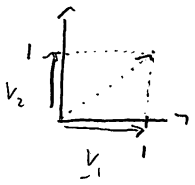
Wichtige Eigenschaften der Determinante (Beweise: 2 T. Übungen)

- $\det(\underline{A}^t) = \det(\underline{A})$
- Vertauschung von Spalten einer Matrix führt zum Vorzeichenwechsel der Determinante
- Inverse einer Matrix existiert nur wenn $\det \underline{A} \neq 0$.
- $\det(\underline{A}\underline{B}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$
- addiert man zu einer Spalte (Zeile) einer Matrix \underline{A} eine Linearkombination der übrigen Spalten (Zeilen), so ändert sich $\det \underline{A}$ nicht.

4.9 Eigenvektoren und Eigenwerte

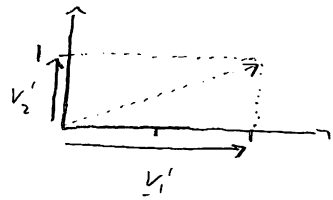
Heuristisch:

Eigenvektoren einer linearen Transformation sind Vektoren, die unter der Transformation ihre Richtung nicht ändern.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→



\underline{v}_1 und \underline{v}_2 sind Eigenvektoren von A , sie ändern ihre Richtung nicht sondern werden nur mit einer skalaren Konstante multipliziert (dem sogenannten Eigenwert)

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ ist kein Eigenvektor.

Eigenvektoren und -werte werden sich als enorm praktisch bei der Beschreibung von schwingenden Systemen mit vielen Freiheitsgraden erweisen. Dort treten die Eigenwerte als Resonanzfrequenzen auf.

Eine weitere wichtige Anwendung ist die Quantenmechanik. Eigenvektoren (der Hamiltonmatrix) beschreiben stationäre Zustände eines Systems.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt ein von Null verschiedener Vektor

$\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

λ heißt der Eigenwert von \underline{v} .

Hinweise: - Verallgemeinerung auf Vektorräume über anderen Körpern als \mathbb{R} ist einfach zu bewerkstelligen, wichtig ist der Fall $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Prinzipiell sind n unterschiedliche Eigenwerte möglich. Eigenvektoren mit demselben Eigenwert lassen sich addieren, Eigenvektoren zum selben Eigenwert spannen einen Unterraum von Eigenvektoren (alle mit Eigenwert λ) auf: Eigenraum.

Beispiele: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, da $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-4 \\ +4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ +3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

und spannt einen Eigenraum $\alpha \underline{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, da $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und spannt einen Eigenraum auf.

$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Drehung um 45°

$\underline{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

\Rightarrow keine Eigenvektoren in \mathbb{R} !

4.9.1 Bestimmung von Eigenvektoren und -werten

$\underline{A}\underline{v} = \lambda \underline{v} = \lambda \underline{I}\underline{v} \Rightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{v} = 0$

\underline{I} Einheitsmatrix

Wir suchen also eine nichttriviale ($\underline{x} \neq 0$) Lösung einer homogenen linearen Gleichung.

Eine solche Lösung existiert nur, wenn die Spaltenvektoren von $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ linear

abhängig sind $\Rightarrow \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$.

Diese Gleichung können wir als ^{n-te Ordnung} polynomiale Gleichung für λ auffassen und lösen!

Beispiel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(s.o.)

$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(2-\lambda)(1+\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$

mit Lösungen $\lambda = -2, 3$

\Rightarrow Eigenvektor lässt sich jetzt aus den (reduzierten) Gl.

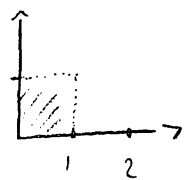
$(2-3)v_1 - 4v_2 = 0$

$-1v_1 - (1+3)v_2 = 0$ Subtraktion:

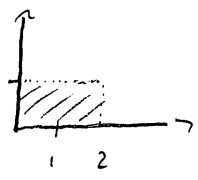
und analog für $\lambda = -2$.

4.10 Die Hauptachsen Transformation

ist sicher die wichtigste Anwendung des Eigenvektor-Konzepts.



A
 \rightarrow



hat in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

eine besonders einfache ("ausgezeichnete")

Darstellung $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ "diagonal"

Die Darstellung A ^{ein LT} ist diagonal, wenn $A_{ij} = 0$ mit $i \neq j$. Auf der Diagonale liegen die Eigenwerte; die Basisvektoren sind Eigenvektoren.

Bei einer anderen Wahl der Basis wäre A nicht diagonal, die Eigenvektoren müsste man erst berechnen.

Kernfrage: Gegeben A (ggf. in einer gegebenen Basis A), kann man eine (zweite) Basis finden, so dass A' diagonal ist? Dies ist genau dann der Fall, wenn die Eigenvektoren von A eine Basis bilden.

- Anwendungen:
- Schwingungsmoden (Eigenmoden) gekoppelter Systeme
 - Beschreibung rotierender Körper
 - QM: Diagonalisierung der Hamilton-Matrix
 - QFT: Diagonalisierung der Lagrange-Funktion liefert Einteilchen-Zustände

Obwohl sich diese Frage allgemein beantworten lässt, beschränken wir uns hier auf einen Spezialfall von grosser Relevanz

4.10.1 Selbstadjungierte Abbildungen und symmetrische Matrizen

Matrizen die in der Physik auf treten sind häufig "symmetrisch". $A_{ij} = A_{ji}$

fundamentale Spannterie z.B. durch Matr. III : $E_n = \frac{1}{2} (x_1, -x_2)^2$ Federstärkel
o. mm
|
x₁ |
x₂ x

$$= \frac{k}{2} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation einer symmetrischen Matrix?

Exkurs: Selbstadjungierte Abbildungen

Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow V$ in einem endlichdimensionalen Vektorraum heißt selbstadjungiert, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$$

wobei $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ das Euklidische Skalarprodukt ist.

Satz: Sei (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis und $L: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, dann ist A genau dann selbstadjungiert, wenn die zugehörige Matrix $A_{ij} = \langle e_i, A e_j \rangle$ symmetrisch ist.

$$L e_j = \sum_i L_{ij} e_i$$

Beweis: 1. $A_{ij} = \langle e_i, A e_j \rangle = \langle A e_i, e_j \rangle$

A selbstadj.
 $= \langle e_j, A e_i \rangle = A_{ji}$

2. $\langle A y, x \rangle = y^t \cdot \underline{A} \cdot x = y^t \cdot \underline{A} \cdot x = \langle y, A x \rangle$

$(A^t)^t = A$

\Rightarrow ist eine Matrix in einer Orthonormalbasis symmetrisch, ist sie auch in allen anderen Orthonormalbasen symmetrisch

Satz: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer selbstadjungierten linearen Abbildung A sind orthogonal zueinander.

Damit kann man Eigenvektoren zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwenden, in dem die Matrixdarstellung einer Abbildung diagonal ist. Bei degenerierten Eigenwerten kann sich orthogonale Vektoren im entsprechenden Eigenraum konstruieren. (nicht für alle Aussagen, s. hierzu v. d. H. 23)

Beweis: Seien u und v Eigenvektoren von A mit unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

selbstadj.

Die Transformation von einer gegebenen Basis $\{e_j\}$ in eine Basis $\{e'_i\}$ der A_{ij} diagonal ist, heißt Hauptachsentransformation. Wir betrachten die Fall, bei dem $\{e'_i\}$ und $\{e_j\}$ orthogonal sind:

Schreiben wir einen beliebigen Vektor $v = \sum_j v_j e_j$ im "alten" Koordinatensystem, ist v'_i im neuen

$$v'_i = \langle e'_i, \sum_j v_j e_j \rangle = \sum_j \langle e'_i, e_j \rangle v_j = \sum_j S_{ij} v_j = \dots$$

$S_{ij} = \langle e'_i, e_j \rangle = \langle e_j, e'_i \rangle$ und $e_j = \sum_i S_{ij} e'_i$
komponente j des i -ten Eigenvektors im alten System

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1 (normiert)} \\ \vdots \\ \text{Eigenvektor } i \dots \end{pmatrix} \quad \text{in alter Basis}$$

$$\underline{v}' = \underline{S} \cdot \underline{v}$$

Genauso kann man die Transformations-eigenschaften der Darstellung von A unter der Hauptachsentransformation betrachten

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle e'_i, A e'_j \rangle = && \text{aus } A e_j = \sum_i A_{ij} e_i \\ &= \left\langle \sum_k S_{ki} e'_k, A \left(\sum_e S_{ej} e'_e \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k,e} S_{ki} \langle e'_k, A e'_e \rangle S_{ej} = \sum_{k,e} S_{ki} A'_{ke} S_{ej} = \left(\underline{S}^T \cdot \underline{A}' \cdot \underline{S} \right)_{ij} \\ &&& \text{da } (\underline{S}^T)_{ik} = S_{ki} \end{aligned}$$

$$\text{oder } \underline{A} = \underline{S}^T \cdot \underline{A}' \cdot \underline{S}$$

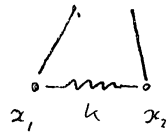
Da \underline{S} zeilenweise aus normierten, orthogonalen Eigenvektoren besteht, gilt:

$$\underline{S} \cdot \underline{S}^T = \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1} & \dots \\ \text{Eigenvektor 2} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1} \\ \text{Eigenvektor 2} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{S}^T = \underline{S}^{-1} \quad \text{und} \quad \underline{A}' = (\underline{S}^T)^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^{-1} = \underline{S} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^T$$

Matrizen mit $\underline{S}^T = \underline{S}^{-1}$ heissen orthogonal. Die entsprechende lineare Transformation $\underline{v}' = \underline{S} \underline{v}$ erhalte das Euklidische Skalarprodukt: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}'^T \underline{v}' = (\underline{S} \underline{u})^T (\underline{S} \underline{v}) = \underline{u}^T \underbrace{\underline{S}^T \underline{S}}_{\mathbb{1}} \underline{v} = \underline{u}^T \underline{v}$
 (\Leftrightarrow Rotationen + Spiegelungen)

Beispiel: Geoppeltes Pendel



$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 + k x_2 \quad k = k/m$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + k x_1$$

$$\text{oder } \ddot{\underline{x}} = - \begin{pmatrix} \omega^2 & -k \\ -k & \omega^2 \end{pmatrix} \underline{x} = - \underline{A} \underline{x}$$

Die Matrix \underline{A} hat zwei Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\omega^2 (x_1 + x_2) + k (x_1 + x_2)) = -(\omega^2 - k) x_1'$$

$$\ddot{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -(\omega^2 + k) x_2'$$

$$\ddot{\underline{x}}' = \begin{pmatrix} -(\omega^2 - k) & 0 \\ 0 & -(\omega^2 + k) \end{pmatrix} \underline{x}'$$

In den neuen Koordinaten ('Normalkoordinaten') liegen zwei unabhängige Differentialgleichungen vor! Die entsprechenden Bewegungsmuster (Phasensynchrone $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, phasenversetzte $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$) heissen Normalmoden des Systems.

4.11 Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ im \mathbb{R}^3 ist in kartesischen Koordinaten definiert als der Spaltenvektor

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

und kann als Determinante $\begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$ gedeutet werden

Geometrische Interpretation

1. $\underline{v} \times \underline{w}$ ist ein Vektor der senkrecht auf \underline{v} und \underline{w} steht:

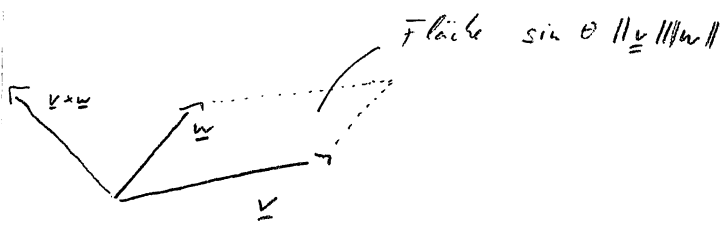
$$\underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = v_1 v_2 w_3 - v_1 v_3 w_2 + v_2 v_3 w_1 - v_2 v_1 w_3 + v_3 v_1 w_2 - v_3 v_2 w_1 = 0 \quad \text{und analog } \underline{w} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$$

2. Die Norm von $\underline{v} \times \underline{w}$ ist $\sin \theta \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$ wobei θ der Winkel zwischen \underline{v} und \underline{w} ist

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \|\underline{v} \times \underline{w}\|^2 + (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 &= v_2^2 w_3^2 - 2v_2 w_3 v_3 w_2 + v_3^2 w_2^2 \\ &\quad + v_3^2 w_1^2 - 2v_3 w_1 v_1 w_3 + v_1^2 w_3^2 \\ &\quad + v_1^2 w_2^2 - 2v_1 w_2 v_2 w_1 + v_2^2 w_1^2 \\ &\quad + (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= v_1^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_1^2 w_3^2 \\ &\quad + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_2^2 w_3^2 \\ &\quad + v_3^2 w_1^2 + v_3^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\underline{v} \times \underline{w}\|^2 &= \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - \cos^2 \theta \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \\ &= (1 - \cos^2 \theta) \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \\ &= \sin^2 \theta \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \end{aligned}$$

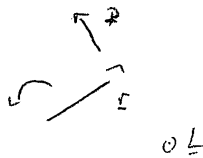


$\|\underline{v} \times \underline{w}\|$ steht senkrecht auf dem von $\underline{v}, \underline{w}$ aufgespannten Parallelogramm und seine Norm ist gleich dem Flächeninhalt.

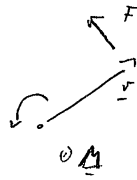
Zusatz: - nach der obigen Definition gehören $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}$ die "Rechte-Hand-Regel" (Konvention über die Richtung von $\underline{v} \times \underline{w}$!)

- $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ ist das Volumen des durch $\underline{u}, (\underline{v} \times \underline{w})$ aufgespannten Parallelepipeds

Beispiele: Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$



Drehmoment $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$



Newton II gibt $\partial_t \underline{L} = \underline{M}$

ED $\underline{F} = \underline{v} \times \underline{B}$

Ausblick:

- Wir haben ausschliesslich reelle Vektorräume betrachtet. In der Quantenmechanik werden Sie Vektorräume über den komplexen Zahlen kennen lernen, also
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$

Auch dort lässt sich ein Skalarprodukt zur euklidischen Norm definieren

$$v = \sum_i v_i e_i \quad \langle v, v \rangle = \sum_i v_i^* v_i$$

Durch die komplexe Konjugation hat nur der Nullvektor die Norm Null (Axiom i) aus 4.5). Bei $\langle v, v \rangle = \sum_i v_i^2$ hätte auch (!) Norm Null.

Selbstadjungierte Abbildungen, Hauptachsentransformationen etc. laufen analog.

- Physiker klassifizieren gerne Objekte nach ihrem Verhalten unter einer Transformation in eine neue Basis

$$t' = t \quad \text{transformiert wie Skalar}$$

$$\underline{x}' = \underline{S} \underline{x}$$

kompakt eine Vektor: "transformiert wie ein Vektor"

$$\underline{A}' = \underline{S} \underline{A} \underline{S}^T$$

Elemente eines Tensors

5. Vektoranalysis

Analysis beschäftigt sich u.a. mit Funktionen und ihren Werten "nahe" gegebener Punkte. z.B. ist $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |v| < \delta \implies \left| \frac{f(x+v) - f(x)}{v} - f'(x) \right| < \epsilon |v|$$

$$\text{oder } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - f'(x)v}{v} = 0$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 0.1 \quad x_2 = 0.01$$

konkret diese Art wach also nicht

$$x_n = (0.1)^n$$

"Wert $f(x)$ die

von Ort x abhängt") sondern auch

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N |x_n - 0| < \epsilon \quad (\text{z.B. "ein$$

Vektor, ob von Ort abhängt") besitzt

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

nd Integral

von Forme und Vektoren auf Linie, \mathbb{C}

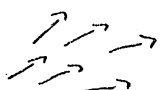
- Aerodynamik: Geschwindigkeit feld
- Elektrodynamik: Maxwellgleichungen sind \mathbb{C}
- Allgemeine Relativitätstheorie: DGL mit \mathbb{R}
- Thermodynamik: Integrale von Formen in Räumen wie z.B. $\int_{\text{Temperatur}}$

5.1 Vektorfelder und 1-Formen

Sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum, dann ist ein Vektorfeld v auf M eine Abbildung

$$v: M \rightarrow V, \quad p \mapsto v(p)$$

die jedem Punkt in M einen Vektor v zuweist

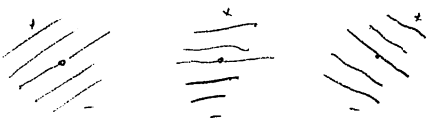
Visualisierung 

Analog dazu ist eine 1-Form eine ortabhängige Linearform:

Sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum, dann ist eine 1-Form λ auf M eine Abbildung,

$$\lambda: M \rightarrow V^*, \quad p \mapsto \lambda_p$$

die jedem Punkt p eine Linearform λ zuweist.

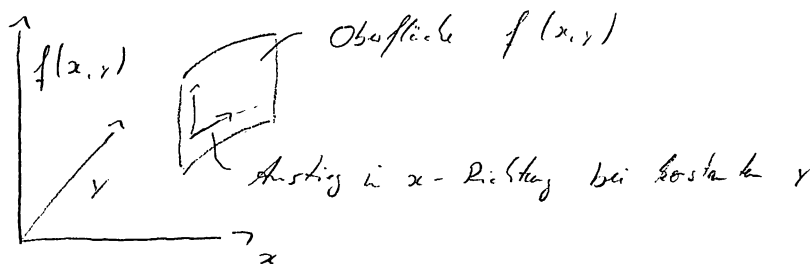


3.5.1 Partielle Ableitung

bezeichnet die Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen nach einer einzelnen Variable.

Anschaulich

$f(x, y)$



Bei konstantem $y=c$ hängt $f(x, c) = f_c(x)$ nur von x ab, so dass wir die Ableitung wie bei Funktionen einer Variable definieren können

Ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion auf einem (offenen; sog. allgemeinen)

Quader $C \subset \mathbb{R}^n$, heißt der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

wenn er existiert.

Beispiele :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2) = 3x_1^2 + x_2 x_3 + 2x_1 x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \sin(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1, x_2)$$

(nicht differenzierte Variable als konstante denken)

Ableitungen höherer Ordnung

sind durch Hintereinander-Ausführung von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}$ definiert.

Schwarz'sche Regel (für Funktionen mit stetiger 2te Ableitung)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

↳ gibt an wie schnell sich die Ableitung in eine Richtung der anderen verändert

Die Schwarz'sche Regel folgt aus

gleichzeitige Konvergenz von stetigen Funktionen \Rightarrow Stetigkeit!

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial f(x_i + h_i, x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x_i, x_j)}{\partial x_j} \right)$$

$$= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{1}{h_j} \left(f(x_i + h_i, x_j + h_j) - f(x_i + h_i, x_j) - f(x_i, x_j + h_j) + f(x_i, x_j) \right) \quad 2.14$$

5.2 Differential

Das Differential einer Abbildung von einem affinen Raum auf einen zweiten, ist eine Verallgemeinerung der Ableitung.

Ableitung von $y = f(x)$ gibt an wie stark sich y bei "kleiner Änderung" von x ändert

$$\Delta y = f'(x) \Big|_x \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|) \quad (\text{linear!})$$

Differential von $f: X \rightarrow Y$ gibt an wie stark sich y bei "kleiner Änderung" von x ändert

$$\Delta y = (D_p f) \Delta x + o(\|\Delta x\|) \quad \text{wobei } X \text{ und } Y \text{ affine Räume sind, } \Delta y, \Delta x \text{ sind Differenzvektoren (mit Norm!)}$$

Seien X, Y zwei affine Räume mit normierten Differenzvektorräumen V, W .

Die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt in Punkt p differenzierbar, wenn eine lineare

Abbildung $L \equiv D_p f$ existiert, so dass gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(p+v) - f(p) - Lv\| < \epsilon \|v\|$$

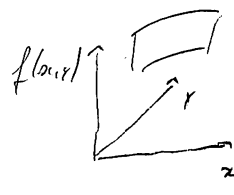
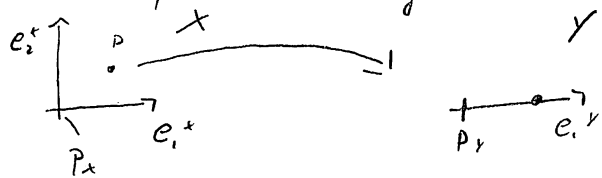
für alle v aus dem Differenzvektorraum von X mit $\|v\| < \delta$.

$$\text{oder kurz} \quad \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - Lv\|}{\|v\|} = 0$$

Anschaulich: Geht man von p aus einen kleinen Schritt $h v$ in Richtung v ($h \ll 1$) dann ist $h(D_p f)v + o(h)$ die entsprechende

Änderung in f . $D_p f$ kann man sich als "hungriges Objekt" vorstellen, das eine Vektor $e \in V$ frisst und einen Vektor $e \in W$ ausspeit. (Genau so wie $f'(x) \Delta x$ auffrisst und Δy ausspeit mit $\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|)$)

Beispiel: Sei f eine Abbildung aus einem 2D affinen Raum auf einen 1D affinen Raum



$$f(p) = p_y + f(p) e_1^y$$

$$g(p) = f(x, y)$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

$$D_p e_1^x = \frac{\partial f}{\partial x} e_1^y$$

$$\text{von } D_p f(\Delta x e_1^x + \Delta y e_2^y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$D_p e_2^x = \frac{\partial f}{\partial y} e_1^y$$

$$\text{auch geschrieben } D_p f = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

5.7 Der Gradient

Nach der allgemeinen Definition des Differentials beschäftigen wir uns mit einigen konkreten Differentialoperatoren auf Feldern

Gradient	eines skalar Feldes	Vektor
Rotation	eines Vektorfeldes	Vektor
Divergenz	eines Vektorfeldes	Skalar

Sei $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, x_1, x_2, \dots, x_n kartesische Koordinaten des \mathbb{R}^n , dann heißt der Spaltenvektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix} \quad (\text{hängt von } x_1, \dots, x_n \text{ ab})$$

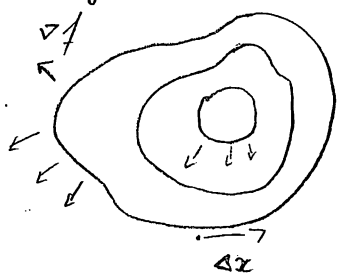
der Gradient von f am Ort p (angegeben durch die Koordinaten x_1, \dots, x_n)

In kartesischen Koordinaten hat ∇f dieselben Komponenten wie das Differential df

$$\Delta f \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \Delta f + o(\|\Delta x\|)$$

Das Skalarprodukt von Δf mit einem Verschiebungsvektor Δx gibt an, wie sich f in linearer Näherung ändert, wenn wir von \underline{x} nach $\underline{x} + \Delta x$ gehen

Visualisierung (2D): $f(x, y)$



Linien mit konstantem f ("Höhenlinien")

Betrachte wir einen Vektor Δx der lokal tangential zu einer der Linien ist

$$\nabla f \cdot \Delta x = 0$$

da f sich (in linearer Näherung) nicht ändert

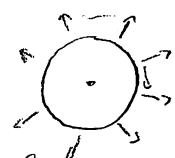
$\Rightarrow \nabla f$ steht überall rechtwinklig auf der Höhenlinie, zeigt damit in Richtung der größten Veränderung pro $\|\Delta x\|$.

∇f Vektor orthogonal zu Höhenlinie 1-Form

Beispiel: $f(\underline{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (f gibt die Entfernung vom Ursprung an)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \partial f / \partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$$

steht senkrecht auf Kugelfläche

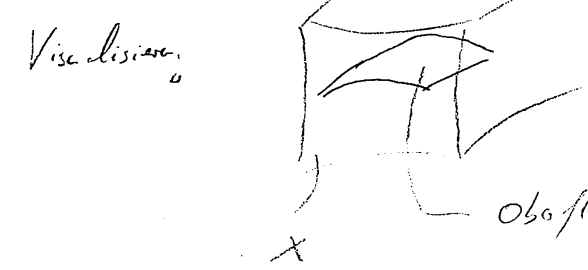


$$\nabla f \cdot \underline{v} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \underline{v} \text{ tangential zur Kugelfläche liegt} \\ \neq 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anwendung: Optimierung unter Nebenbedingung (Lagrange-Multiplikator)

Gesucht sei das lokale Maximum einer Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ unter einer

Nebenbedingung $g(x) = 0$



Oberfläche mit $g(x) = 0$, ∇g steht orthogonal zur Oberfläche

Stellen wir uns vor, die gesamte Oberfläche $g(x) = 0$ abzukampfen, auf der Suche nach einem lokalen Maximum von $f(x)$.

An einem solchen Maximum ist der Gradient von $f(x)$ orthogonal zur Oberfläche $g(x) = 0$! (Wenn ∇f eine Komponente tangential zu $g(x) = 0$ hätte, würde sich $f(x)$ bei einem kleinen Schritt in diese Richtung in erste Ordnung ändern, das widerspricht jedoch der Annahme des Maximums - beim Maximum ändert sich f erst in zweiter Ordnung!).

$\Rightarrow \nabla f$ ist parallel zu ∇g

$$\Rightarrow \nabla f = \nu \nabla g \Rightarrow \nabla(f - \nu g) = 0$$

} Gesucht nach x und ν gibt Maximum
 ν : Lagrange-Multiplikator

Wir kommen noch einmal kurz zu Gradientenfeldern zurück: Sei $\underline{F}(\underline{x})$ ein Gradientenfeld mit

$$\underline{F}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(Gradientenfeld \underline{F} definiert durch $\underline{F} f(\underline{x}) : \underline{F} = \nabla f$)

Für $f(\underline{x})$ gilt allerdings auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

und mit $F_i = (\underline{F})_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i -te Komponente eines Vektorfeldes)

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

Ein Gradientenfeld in 3D hat damit

$$\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0$$

5.8 Die Rotation (engl. curl)

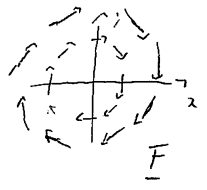
In 3D und kartesischen Koordinaten läßt sich für ein Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$ ein Spaltenvektor mit Komponenten

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix}$$

definieren. $\nabla \times$ soll an das Kreuzprodukt erinnern: " $\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ "

Ein Gradientenfeld $\underline{F} = \nabla f$ hat (s.o.) Rotation null: $\nabla \times \nabla f = 0 \quad \forall f$.

Beispiel: $\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$



$\nabla \times \underline{F}$

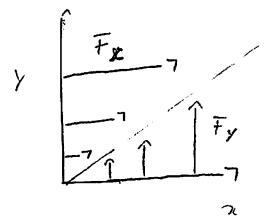
(da Vektoren nach außen hin immer größer werden)

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (-x) \\ \frac{\partial}{\partial z} y - \frac{\partial}{\partial x} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (-x) - \frac{\partial}{\partial y} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Intuitiv: $\underline{F}(\underline{x})$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit
 $\nabla \times \underline{F}$ beschreibt wie sich ein kleiner Ball mit festem Mittelpunkt an Ort \underline{x} rotiert
 (| $\nabla \times \underline{F}$ | ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit, die Richtung von $\nabla \times \underline{F}$ gibt die Drehachse an)

Warum gibt z.B. $(\nabla \times \underline{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ die "Kreuzung" des Vektorfeldes (hier: in der xy-Ebene) an?

keine Kreuzung



$$\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

(Beide positiv, gleiches Vorzeichen $\Rightarrow (\nabla \times \underline{F})_z = 0$)

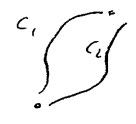
Kreuzung



$$\frac{\partial F_y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

haben unterschiedliche Vorzeichen $\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq 0$

Kreuzung $\nabla \times \underline{F} \neq 0 \Leftrightarrow$ Wegintegrale sind wegschließend



C , geschlossen = 0

wenn $\nabla \times \underline{F} \neq 0$ dann folgt $\neq 0$

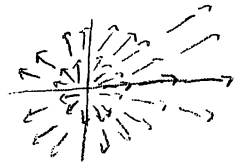
5.9 Die Divergenz

ist eine Abbildung von einem Vektorfeld auf ein skalares Feld, definiert durch

$$\nabla \cdot \underline{F}(x) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$\nabla \cdot$ soll an das Skalarprodukt erinnern " $\nabla \cdot \underline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ "

Beispiel: $\underline{F}(x) = \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

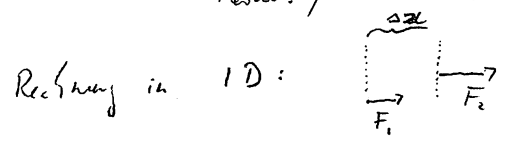


$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(konstant)

(da Vektoren nach aussen hin immer größer werden)

Intuition: $\underline{F}(x)$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit
 $\nabla \cdot \underline{F}$ gibt an, wieviel Flüssigkeit netto aus einem kleinen Volumen herausfließt (pro Volumen).



$$\frac{\partial F_x}{\partial x} \approx \frac{F_2 - F_1}{\Delta x}$$

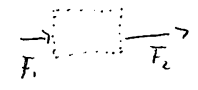
gibt an, wie stark sich F_x in x -Richtung verändert

Dichtekänderung pro Zeit

$$- \frac{\Delta t F_2 - \Delta t F_1}{\Delta t \Delta x} \leftarrow \text{Netto Ausfluss}$$

$$= + \frac{\partial F}{\partial x}$$

Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen:



Differenz fließt an beiden über ab, führt dort zu $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ oder ändert die Dichte $-\tau$.

$\nabla \cdot \underline{F} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ scheint eine partielle Verallgemeinerung auf $D > 1$ zu sein, die wie im Folgenden ausführlich zu werden werden.

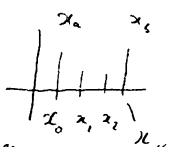
2.3 Linienintegral

Das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ gibt z.B. die durch Kraft entlang eines geraden

Wege verrichtete Arbeit an

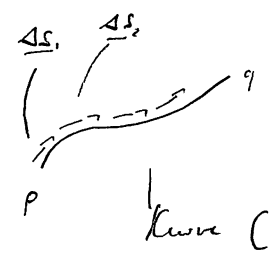
$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta_i \rightarrow 0} f(x_i)$$

"Riemann-Integral"

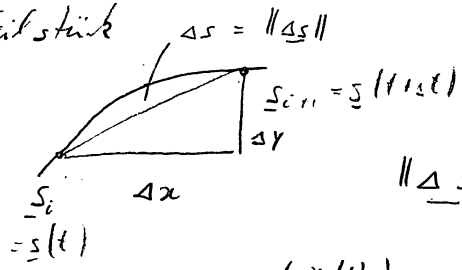


Integrale entlang Kurven: hermitisch

$$\int_C ds F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \|\underline{s}_{i+1} - \underline{s}_i\| F(\underline{s}_i)$$



betrachten wir ein Teilstück



$$\|\underline{\Delta s}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \dots}$$

Wenn sich die Kurve C durch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ beschreiben lässt $t=0$ $t=2\Delta t$ $t=1$

erhalten wir $\|\underline{\Delta s}\| = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 + \dots}$

und $\int_C ds F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\Delta_i} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \dots}}_{\text{Integral eines Integrals über } t} F(\underline{s}(t))$

Parameterisierung von Kurven

Eine Parameterisierung γ einer Kurve C (als Punktmenge) ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$

mit $\gamma([0, 1]) = C$, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ und $\gamma'(t) \equiv \frac{d\gamma}{dt} \neq 0 \forall t \in [0, 1]$

Darstellung von $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$

Line, surface etc. integrals can also be defined via Gram's determinant of the metric tensor (Jänich vol 2)

$$\int d^k F \dots = \int d\alpha_1 \dots d\alpha_k \sqrt{\text{Vol} g} \dots$$

with $g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}$

1. Line integral $\det g = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2$

2. Surface using $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

gives $\sqrt{\text{Vol} g} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right\|$

3. Volume = Jacobian

Definition des Linienintegrals

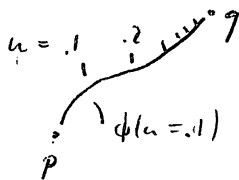
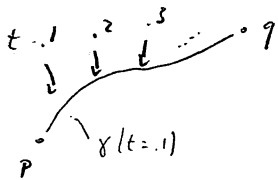
Gegeben eine Parametrisierung γ der Kurve C ist das Wegintegral

$$\int_C ds F(\underline{z}) \quad \text{eines skalaren Feldes } F(\underline{z}) \text{ gegeben durch}$$

$$\int_C ds F(\underline{r}) = \int_0^1 dt \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\| F(\gamma(t))$$

Diese Definition darf natürlich nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängen (bis auf ein Vorzeichen): Wir zeigen, dass das Wegintegral tatsächlich unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist.

Betrachten wir eine zweite Parametrisierung von C ; $\phi(u)$ mit $\phi([0,1]) = C$



Dann existiert eine differenzierbare Funktion $t = f(u)$, die jedem u ein t zuordnet mit $\phi(u) = \gamma(f(u))$

(Übersetzung von einer Parametrisierung in die andere)

$$\int_0^1 du \left\| \frac{d\phi}{du} \right\| F(\phi(u)) = \int_0^1 du \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \frac{dt}{du} F(\gamma(f(u))) = \int_0^1 dt \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| F(\gamma(t))$$

Kettenregel $\frac{d\phi}{du} = \frac{d}{du} \gamma(f(u)) = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{du}$ ↑
Substitution

Beispiel: Kreis in 2D

$$\gamma(t) = p + R \cos(2\pi t) e_1 + R \sin(2\pi t) e_2$$

$$\dot{\gamma}(t) = R \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$$

$$\int_C ds = \int_0^1 dt \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$$
$$= \int_0^1 dt \ 2\pi R = 2\pi R$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 2\pi R \begin{pmatrix} -\sin 2\pi t \\ \cos 2\pi t \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = 2\pi R \sqrt{\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t}$$
$$= 2\pi R$$

Analog lässt sich Linienintegrale von Vektorfeldern definieren

$$\int_C d\underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{x}) = \int_0^1 dt \frac{d\gamma}{dt} \cdot \underline{F}(\gamma(t))$$

$$\int_C d\underline{s} \times \underline{F}(\underline{x}) = \int_0^1 dt \frac{d\gamma}{dt} \times \underline{F}(\gamma(t))$$

Wegintegrale von Gradientenfeldern

Sei $\underline{F}(\underline{x})$ ein Gradientenfeld, d.h. $\exists f(\underline{x}) : \underline{F}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x})$

$$\int_C d\underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{x}) = \int_0^1 dt \frac{d\gamma}{dt} \cdot \underline{F}(\gamma(t))$$
$$= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left(f(\underline{x}(t)) \right)$$
$$= f(\underline{x}(1)) - f(\underline{x}(0))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\underline{x}(t)) = \nabla f(\underline{x}(t)) \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}$$
$$= \underline{F}(\underline{x}(t)) \cdot \frac{d\underline{s}}{dt}$$

unabhängig vom Pfad C :



haben alle dasselbe Wertintegral!

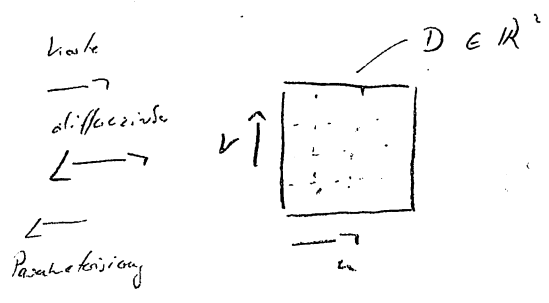
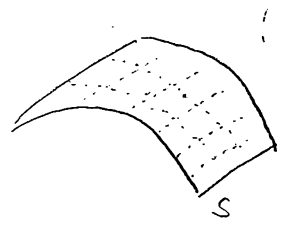
[Korollar: ist das Wertintegral stets unabhängig vom Weg ist \underline{F} ein Gradientenfeld $= \nabla U$]

Zur Definition dieser Abschnitte benötigt wir eine Parameterisierung der Oberfläche, über die wir integrieren. (Vgl. Wegintegral)

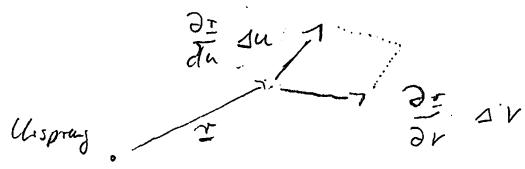
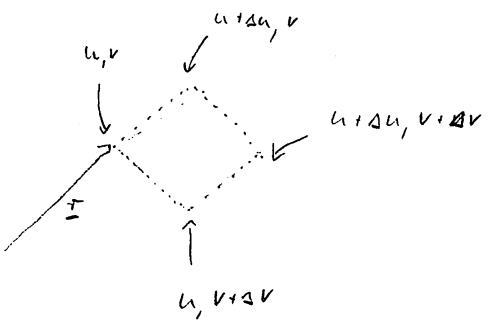
Eine Parameterisierung einer Oberfläche X (als Punktmenge) ist eine ein-eindeutige (invertierbare) Abbildung γ von $D \in \mathbb{R}^2$ auf X , die stetig differenzierbar ist und deren inverses ebenso stetig invertierbar ist, so dass $\gamma(D) = X$.

↑
Differenzierbarkeit

← analog auch für
Stetigkeit, Umkehrabb.



Heuristisch: Betrachte wir statt eines infinitesimalen Flächenelement ein "sehr kleines" Element der Oberfläche



das dem Flächenelement zugeordnete Vektor ist

$$\Delta \underline{S} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \Delta v \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v$$

Mit dieser Parameterisierung des Flächenelements definieren wir die Oberflächenintegrale

$$\int_S d\underline{S} \cdot \underline{F}(\underline{z}) = \int_D du dv \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \cdot \underline{F}(\underline{r}(u,v))$$

$$\int_S dS \phi(\underline{z}) = \int_D du dv \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| \phi(\underline{r}(u,v))$$

(vgl. Linienintegral $\int dt \frac{ds}{dt} \cdot \underline{F}(\underline{z})$)

Beispiel : Das Quadrat $0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 1$ $z=0$ definiere die Oberfläche S

Bei diesem Beispiel können wir natürlich die Antworten. Trotzdem ist es hilfreich die Definitionen zunächst an einem sehr einfachen Beispiel anzuprobieren

$$\int_S dS = \int_S 1 \quad \text{ist der Flächeninhalt des Quadrats}$$

$$\int_S d\underline{S} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist der konstante Vektor } \underline{\hat{z}} \text{ integriert über } S$$

Als Parametrisierung bietet sich an

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 0 \end{aligned}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

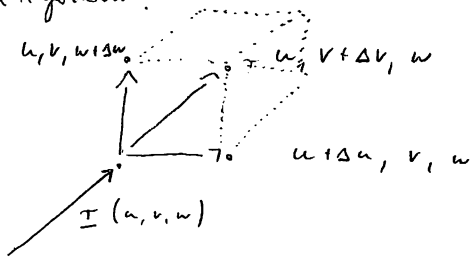
$$\int_S dS = \int_0^1 \int_0^1 \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^1 \int_0^1 1 du dv = 1$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_S d\underline{S} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du dv = 1$$

5.5 Das Volumenintegral

Das Volumenintegral erlaubt Vektor- und Skalarfelder auf Volumina zu integrieren.



ΔV gibt das Volumen eines kleinen Volumenelements an

$$\int_V dV \phi(\underline{r}) = \int du dv dw \underbrace{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \right) \right|}_{\text{Flächenelement}} \phi(\underline{r}(u, v, w))$$

Volumenelement

definiert das Volumenintegral eines skalar Feldes $\phi(\underline{r})$. Das Volumenintegral eines Vektorfeldes $\int dV \underline{F}(\underline{r})$ ist analog definiert. Beide Definitionen sind unabhängig von der Parametrisierung. (Selbst beweisen.)

Beispiel: Kugelvolumen $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$V = \int_V dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right) \right|$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

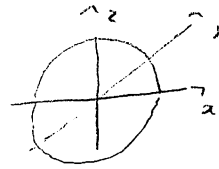
$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} r^2 \sin \theta$$

$$= r^2 \sin \theta$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \left(\int_0^R dr r^2 \right) \left(\int_0^\pi d\theta \sin \theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right)$$

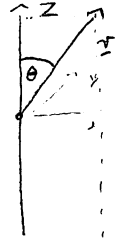
$$= \frac{1}{3} R^3 \times 2 \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Beispiel: Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

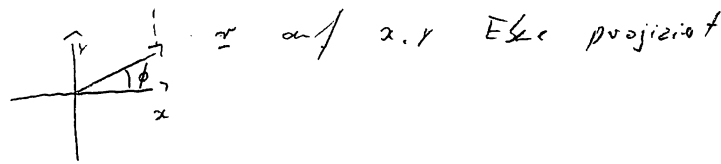


Eine geeignete (und häufig genutzte) Parametrisierung der Kugeloberfläche sind die

Winkel θ und ϕ



$$0 \leq \theta \leq \pi$$



→ auf x, y Ebene projiziert

$$x = R \sin \theta \cos \phi$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi$$

$$z = R \cos \theta$$

$$\text{oder } \underline{r} = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}$$

R, θ, ϕ werden als Kugelkoordinaten eines Punktes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet, θ wird Polwinkel, ϕ als Azimutwinkel genannt.

Wir berechnen als Beispiel die Oberfläche einer Kugel.

$$S = \int_S dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right\|$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ +R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \\ R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \\ +R^2 (\cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi) \end{pmatrix}$$

$$= R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ + \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ + \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right\| = R^2 |\sin \theta| = R^2 \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R^2$$

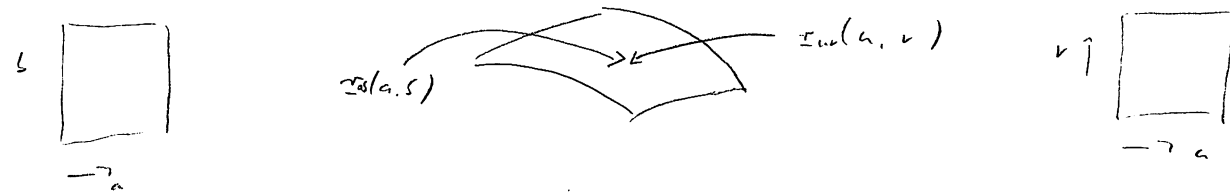
Geometrische Interpretation



Ring mit Radius $R \sin \theta$, Fläche $(2\pi \sin \theta R) (R d\theta)$
 \Rightarrow Flächenelement $2\pi R^2 \sin \theta d\theta$

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Definitionen unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Oberfläche sind:

Wir betrachten eine zweite Parametrisierung a, b



nehmen an, dass $\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b}$ und $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ in dieselbe Richtung zeigen; steht

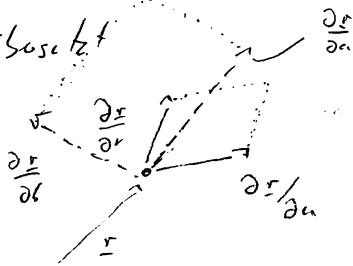
Mit $u = u(a, b)$ und $v = v(a, b)$ folgt aus $\underline{r}_{as}(a, b) = \underline{r}_{uv}(u(a, b), v(a, b))$ und der Kettenregel

$$\frac{\partial \underline{r}_{as}}{\partial a} = \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial a}$$

$$\frac{\partial \underline{r}_{bs}}{\partial b} = \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial b}$$

$$\text{oder} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \end{pmatrix} = \underline{J} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

\underline{J} beschreibt die lineare Abbildung, die lokal von der Parametrisierung (u, v) in (a, b) übersetzt



\underline{J} wird als Jacobi-Matrix der Transformation von (u, v) nach (a, b) bezeichnet, die Änderung des Flächeninhalts ist (lokal)

$$\left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b} \right\| = |\det(\underline{J})| \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\|$$

Da $\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b}$ und $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ beide senkrecht auf der Oberfläche stehen und parallel sind

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial s} \right) = \left| \det \underline{J} \right| \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{D_{as}} da ds \left(\frac{\partial \underline{r}_{as}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}_{as}}{\partial s} \right) \cdot \underline{F}(\underline{r}_{as}(a,s))$$

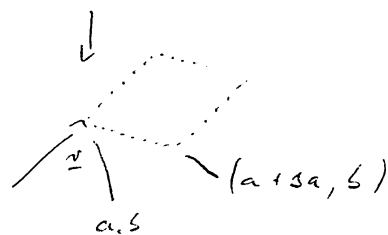
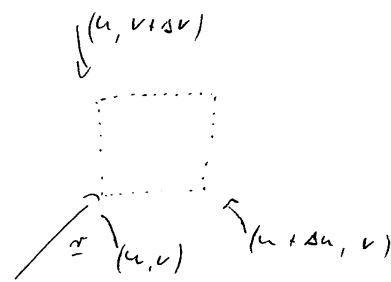
$$= \int_{D_{uv}} da ds \left| \det \underline{J} \right| \left(\frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \right) \cdot \underline{F}(\underline{r}_{uv}(u,v))$$

Als letzter Schritt müssen wir jetzt noch die Integrationsvariablen von (a,s) nach (u,v) ändern; lokal gilt

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial a & \partial u / \partial s \\ \partial v / \partial a & \partial v / \partial s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

$$= \underline{J}^T \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{J} = \det \underline{J}^T$$



$$\text{und} \int_{D_{uv}} du dv (\cdot) = \int_{D_{as}} da ds \left| \det \underline{J} \right| (\cdot)$$

$$= \int_{D_{uv}} du dv \left(\frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \right) \cdot \underline{F}(\underline{r}_{uv}(u,v))$$

Die Definition des Oberflächenintegrals ist also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Notiz: Vorgehen mit Integration über eine Variable und der Substitution $x' = -x$

$$\text{ej. i) } \int_0^1 dx = \int_0^{-1} dx' (-1) = \int_{-1}^0 dx'$$

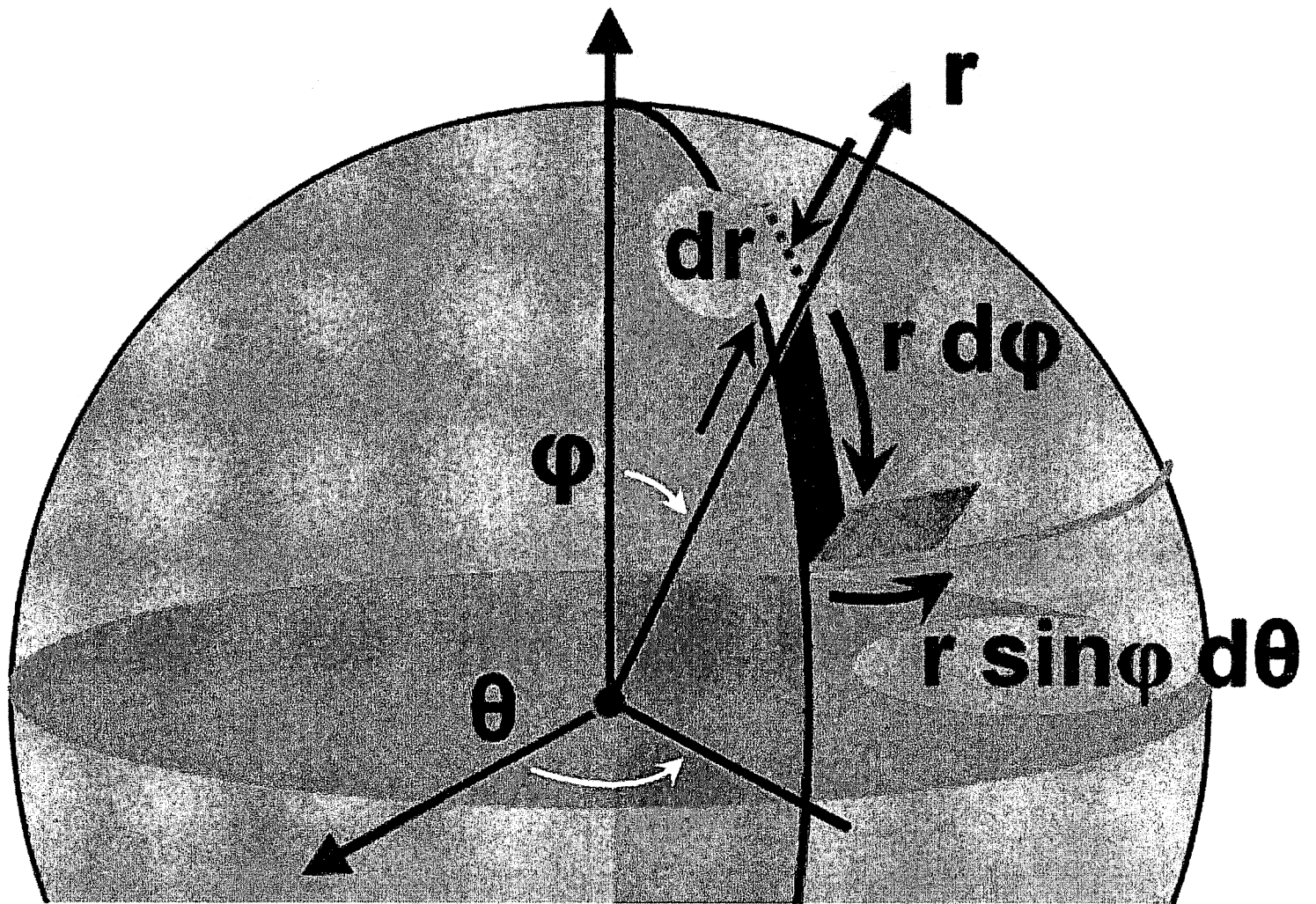
$$\text{ii) } \int_D dx = \int_{D'} dx' | -1 |$$

$$\text{mit } D: 0 < x < 1 \\ D': -1 < x < 0$$

Intervall aufsteigend per Konvention

$\Rightarrow | -1 |$ als Jacobi-Determinante

wird in der Regel vertauscht da 5.14



5.6 Krümmungslinige Koordinaten

Prinzipiell lässt sich jedes (klassische) Problem in kartesischen Koordinaten behandeln, oft sind "problemangepasste Koordinaten" krümmungslinige Koordinaten sinnvoll.

Γ (= Abstände auf Kugeloberfläche)

- Parametrisierung des Kugelvolumens durch Kugelkoordinaten

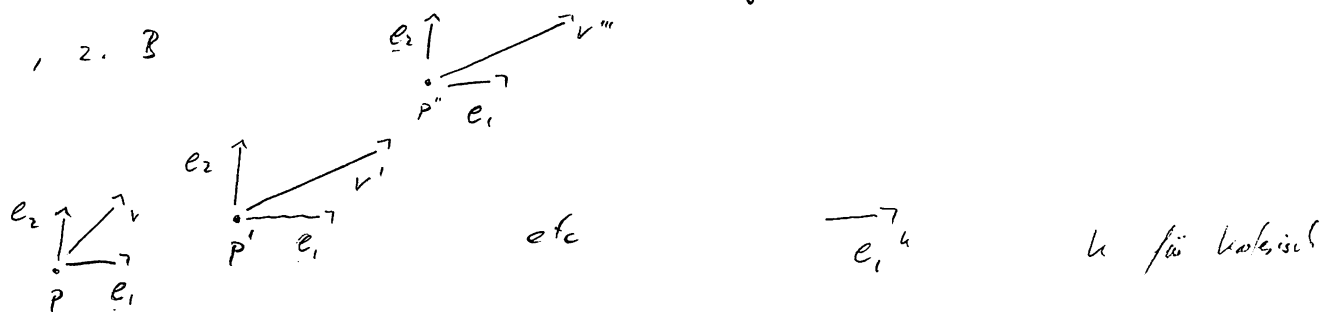
- allgemeine Relativitätstheorie: Energie-Masse krümmt die 4 Raumzeit

5.6.1 Vektorbasen in Krümmungslinigen Koordinaten

Wir betrachten ein Vektorfeld v auf einem affinen Raum M . Jedem Punkt $m \in M$ ist ein Vektor $v \in V$ zugeordnet.

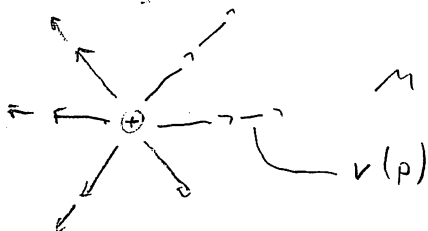
Als Basis dieser Vektoren kann man an jeder Stelle dieselbe Basis nutzen, z. B.

2D

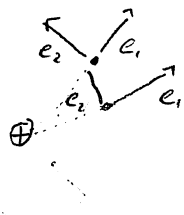


(kartesische Basis in 2D)

In diesem Beispiel allerdings



macht es Sinn an jeder Stelle unterschiedlich orientierte Basissysteme zu verwenden



$e_i^R(p)$ zeigt damit immer in Richtung des Feldes und
und hängt von p ab

Wie hängen die Basisvektoren mit den Koordinaten zusammen?

Betrachten wir Koordinaten u, v, w , die den 3D Raum parametrisieren.

Die 3 Vektoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ sind i.A. nicht normiert.

Die normierten Vektoren

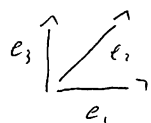
$$\underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{x} / \partial u}{\| \partial \underline{x} / \partial u \|}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\partial \underline{x} / \partial v}{\| \partial \underline{x} / \partial v \|}$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\partial \underline{x} / \partial w}{\| \partial \underline{x} / \partial w \|}$$

sind Einheitsvektoren, die in Richtung der Koordinatenlinien liegen, d.h. entlang der Linien mit 2 oder 3 Koordinaten konstant.

e.g. kartesische Koordinaten $u = x$, $v = y$, $w = z$



$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an jedem Ort gleiche Basis

e.g. Kugelkoordinaten

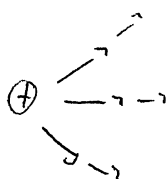
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1^R = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

etc.

$\Rightarrow \underline{e}_1^R$ ist parallel zu \underline{x}

\Rightarrow Ein radialsym. Vektorfeld hat in der Kugelkoordinatenbasis nur eine Komponente entlang \underline{e}_1



$$\underline{v}(p) = f(r) \underline{e}_1^R$$

Jeder Vektor $v \in V$ am Punkt $p \in M$ kann jetzt durch die lokale Basis dargestellt werden

$$\underline{v}^R(p) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in kartesischen + Basis}$$

$$\underline{v}^k(p) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{in kugelsche Koordinaten + Basis}$$

Fast alle Koordinatensysteme, die in der Praxis genutzt werden sind orthogonal, also $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

5.6.2 Das Abstandsmaß in krummlinigen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten ist der Abstand zwischen zwei Punkten mit den Koordinaten (x, y, z) und $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta s$$

$$\text{oder } \Delta s^2 = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

In krummlinigen Koordinaten kann die Beziehung nicht so einfach sein. Erhöht man z.B. den Azimutwinkel ϕ immer weiter kommt man noch eine volle Umdrehung wieviel zum Ausgangspunkt. \Rightarrow erhöht man x immer weiter nimmt die Entfernung stets zu.

Mit $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ können wir jedoch Δx , Δy , Δz durch Δu , Δv , Δw ausdrücken

Für kleine Δu , Δv , Δw (lineare Näherung) gilt

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \mathbb{J}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w \end{pmatrix} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w \end{pmatrix} \cdot \mathbb{g} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

\mathbb{g} wird als die metrische Tensor bezeichnet. $(g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j})$

Beispiel in 2D: Polarkoordinaten

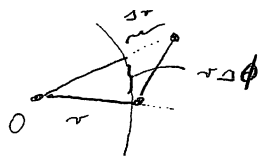
$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \phi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \phi \end{pmatrix}$$

$\mathbb{L} \mathbb{J}^T$

$$\mathbb{g} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \Delta \phi^2$$



$$l^2 = \int dt \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} \right) \cdot \mathbb{g} \left(\frac{du}{dt} \frac{du}{dt} \right)$$

5.19

5.11 Integraltheoreme

Das Fundamentalthema der Analysis

$$\int_a^b dx \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) = f(b) - f(a)$$

verbindet die Werte von $f(x)$ an den Enden des Intervalls $[a, b]$ mit dem Integral der Ableitung von $f(x)$.

In höherer Dimension als eine existierende Verallgemeinerung dieser Theoreme, die Integrale über eine Oberfläche oder ein Volumen von einer Ableitung mit einem Integral über den Rand (Linie, Fläche) verbinden. Was also "im Inneren" (Volumen) geschieht ist bereits durch "den Rand" festgelegt.

Überall in der Elektrodynamik werden diese Theoreme genutzt.

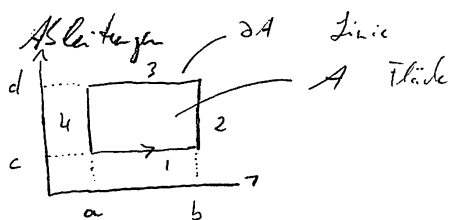
$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$$

ist eine der Maxwell-Gleichungen und verbindet die Divergenz des elektrischen Feldes $\underline{E}(\underline{r})$ mit der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ an der selben Stelle.

Ein Integraltheorem erlaubt das Integral von $\underline{E}(\underline{r})$ über eine geschlossene Oberfläche mit dem Integral der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ über das eingeschlossene Volumen in Beziehung zu setzen (= eingeschlossene Ladung!) $\underline{\quad}$

5.11.1 Das Green'sche Theorem in zwei Dimensionen

Wir betrachten zwei Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ mit kontinuierlichen partiellen Ableitungen



$$\iint_A dx dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d dy [Q(b, y) - Q(a, y)]$$

$$\int_{\partial A} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} \quad \text{in } 2D: \underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\int_c^d \int_a^b dx dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d dx F_x(x, y) + \int_a^b dy F_y(x, y)$$

$$\int_c^d dx F_x(x, y) = \int_c^d dt \frac{dx}{dt} F_x(x, y)$$

Vergleich mit dem Wegintegral

$$\int_{\partial A} dy Q(x, y) = \int dt Q(x, y) \frac{dy}{dt}$$

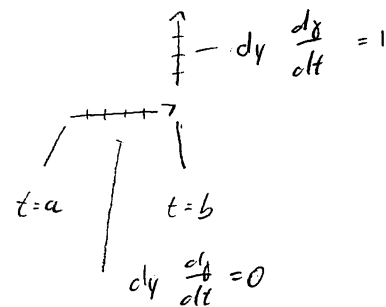
1-Form

$$= \int_c^d dy Q(b, y) \quad \text{Teilstrücke 2}$$

$$+ \int_d^c dy Q(a, y) \quad \text{Teilstrücke 4}$$

$$= \int_c^d dy [Q(b, y) - Q(a, y)] \quad (2)$$

bestimmte Integrale



$$\Rightarrow \iint_A dx dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_{\partial A} dy Q(x, y) \quad (3) \quad \text{für das gewählte Rechteck}$$

Analog lässt sich für $P(x, y)$ zeigen

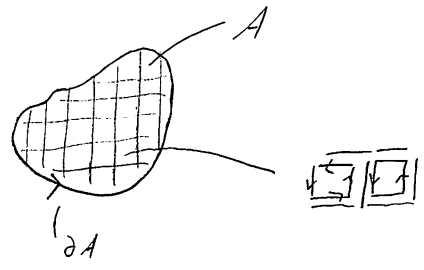
$$-\iint_A dx dy \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\partial A} dx P(x, y) \quad (4)$$

und in Kombination von (3) und (4)

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\partial A} (dx P(x, y) + dy Q(x, y)) \quad (5)$$

(Linienintegral gegen die Uhrzeigersinn)

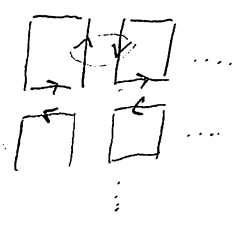
Wir haben (5) für ein Rechteck bewiesen. Betrachte eine Fläche A in (x, y) Ebene, die als Grenzfall einer Menge von kleinen Rechtecken betrachtet werden kann:



Die Summe von (5) über alle Rechtecke ergibt für die Doppelintegrale (links)

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

für die Linienintegrale löschen sich alle Beiträge von Inneren von A gegenseitig aus



von Rand erhält man

$$\oint_{\partial A} (dx P(x, y) + dy Q(x, y)) = \iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

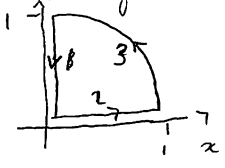
Green's Theorem

Beispiel: $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \iint_A dx dy \quad \text{Fläche } A$$

$$\oint_{\partial A} dx P(x, y) + dy Q(x, y) = \oint_{\partial A} dx x$$

⇒ Linien in Kugel kann benutzt werden um eine Fläche zu berechnen, z.B. $\frac{1}{4}$ -Kreis



1. gibt Null, da Integral $x = 0$

2. gibt Null, da $dy \frac{dy}{dt} = 0$ (Parametrisierung durch θ)

$$3. \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{dx(\theta)}{d\theta} x(\theta) = \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \checkmark$$

$$y(\theta) = \sin \theta \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$

$$x(\theta) = \cos \theta$$

5.11.2 Der Gauss'sche Integralsatz

"divergenz theorem"

Verbindet die Volumeneinheit des Divergenz eines Vektorfeldes mit seiner Oberflächeintegral

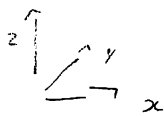
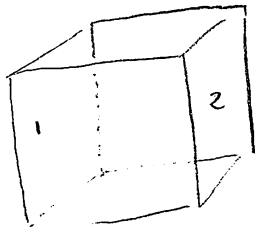
Wir betrachten ein Vektorfeld in 3D

$$\underline{V}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$\underline{V}(\underline{x})$ könnte ein Strömungsfeld sein, $\underline{V} \cdot \underline{\Delta S}$ gibt an wieviele Teilchen pro Zeiteinheit durch ein kleines Fläche element $\underline{\Delta S}$ strömen

Heuristisch:

Wir betrachten einen (kleinen) Quader mit Kantenlänge $\Delta x, \Delta y, \Delta z$



Der netto Fluss in x-Richtung (durch Fläche 2 minus durch Fläche 1) ist

$$(v_x|_2 - v_x|_1) \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

In y-Richtung und z-Richtung erhält man

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

durch hintere und vordere Wand

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

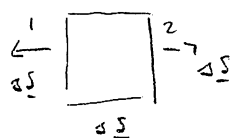
durch obere und untere Wand

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \underline{V} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ist der netto Fluss aus dem Würfel heraus.

Dieser Fluss lässt sich auch als Flächenintegral über die Oberfläche des

Quaders schreiben:



2. $\Delta S \cdot \underline{V}$ + Fluss hinaus

1. $\Delta S \cdot \underline{V}$ - Fluss hinein

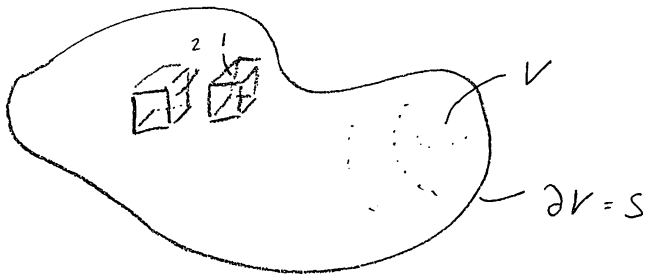
$$\oint \Delta S \cdot \underline{V} = \oint \text{Netto Fluss aus Würfel hinaus} = \nabla \cdot \underline{V} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (5.28)$$

$$\int d\underline{S} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \nabla \cdot \underline{v} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1)$$

S : Würfeloberfläche

$\rightarrow (v_x|_2 - v_x|_1) \Delta y \Delta z$ ist Beitrag zum Flächenintegral von Seite 1 nach 2

Für ein Volumen, das sich in viele kleine Quader zerlegen lässt



heben sich die Beiträge benachbarter Seiten zum Flächenintegral weg. Die Summe von (1) über alle Quader ergibt

$$\int_{S=\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \int_V dV \nabla \cdot \underline{v} \quad \text{Goursat'scher Integralsatz}$$

Anwendung: die Kontinuitätsgleichung

Betrachte wir den Fluss einer Flüssigkeit aus Teilchen, die erhalten sind; also nicht an einer Stelle auf/tanken ("Quelle") oder verschwinden ("Senke", "sink"). ("source")

Rate mit der die Zahl der Teilchen im Quader anwächst = - Rate des Teilchenflusses aus dem Quader heraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = - \nabla \cdot \underline{v} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$\rho(\underline{r}, t)$ ist die Teilchendichte $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ die Zahl der Teilchen in einem kleinen Quader.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{v}$$

Kontinuitätsgleichung

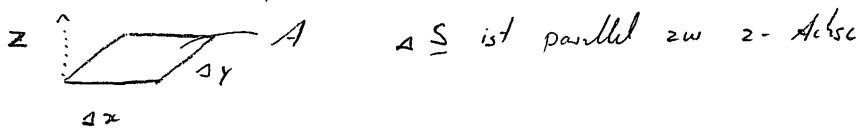
Beziehen wir die Zahl der Teilchen in einem Volumen V mit $N(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} N = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V dV \nabla \cdot \underline{v} = - \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{v}$$

5.11.3 Der Satz von Stokes (genau Stokes-Kelvin Theorem)

Verbindet das Flächenintegral eine Rotation eines Vektorfeldes mit seinem Linienintegral.

Wir beginnen mit einem rechteckigen Flächenelement, und legen die z-Achse orthogonal zu seiner Oberfläche.



Wir betrachten wieder ein Vektorfeld $\underline{v}(r)$ und nutzen das Greensche Theorem

$$\text{mit } Q(x,y) = v_y(x,y)$$

$$P(x,y) = v_x(x,y)$$

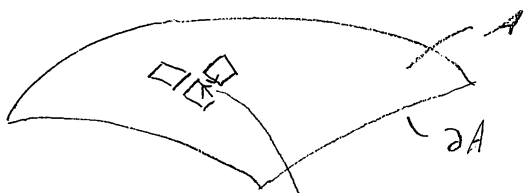
$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \iint_A dx dy \underbrace{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{\substack{\text{z-komponente} \\ \text{von } \nabla \times \underline{v}}} = \int_A d\underline{S} \cdot (\nabla \times \underline{v})$$

|| Greensches Theorem || (2)

$$\oint_c dx P(x,y) + dy Q(x,y) = \oint_c dx v_x(x,y) + dy v_y(x,y) = \oint_c d\underline{r} \cdot \underline{v}(r)$$

da $d\underline{r}$ in der xy Ebene liegt.

Für eine benachbete Oberfläche, die man in (viele) kleine Rechtecke zerlegen kann



benachbarte Teilstücke des Linienintegrals heben einander auf

⇒ Summe von (2) über alle kleine Rechtecke ergibt

$$\int_A d\underline{S} \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \oint_{\partial A} d\underline{r} \cdot \underline{v}(r) \quad (\text{Satz von Stokes})$$

1. Funktionen und Potenzreihen

1.1 Funktionen sind Zuordnungen, die in der Physik zur Beschreibung unterschiedlicher Zusammenhänge genutzt werden, z. B.

Position eines x Punktteilchens in einer Dimension zur Zeit t (t sei beliebig)
 $x(t)$

Elektrisches Potential V am Punkt x
 $V(x)$

Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge X ein Element y einer Zielmenge Y zu.
 $f: X \rightarrow Y$
 $x \mapsto y$

und wir schreiben in etwas lazierer Notation $y = f(x)$.

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind punktweise gleich, wenn
 $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

Diese Definition erlaubt es, nun mit Funktionen zu rechnen (also z. B. Gleichungen für Funktionen zu lösen).

Diese ersten Funktionen, die wir betrachteten, sehen sehr einfach aus:

1.2 Potenzreihen

Wir betrachten eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit festen Koeffizienten $\{a_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($a_k \in \mathbb{R}$)

Für endliches n ist $f(x)$ ein Polynom n -ter Ordnung

z. B. $f(x) = 3 + 7x + 19.5x^2 + \pi x^3$ ($n=3$)

Eine Vielzahl von Funktionen lassen sich als unendliche Potenzreihe darstellen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (1)$$

was sich oft als unendlich nachweist.

Zunächst müssen wir allerdings klären, ob und wann die unendliche Summe (1) überhaupt existiert. Wir betrachten zunächst ein gegebenes festes x und schreiben $b_n = a_n x^n$

Eine Folge von (Teil-)Summen B_0, B_1, B_2, \dots

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

heißt Reihe. Existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$

$|B_n - B| < \epsilon$, so nennen wir die Folge und ^{Reihe} konvergent mit Grenzwert

B und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

(kurz $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |B_n - B| < \epsilon$)

Beispiel: $b_0 = 1, b_1 = 0.1, b_2 = 0.01, \dots$

$B_0 = 1, B_1 = 1.1, B_2 = 1.11, \dots$

Grenzwert 1.1111...

Diese Aussage kann sich auch auf Potenzreihen übertragen, allerdings kann es sein, das die Reihe nur für bestimmte x konvergiert:

z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (hier sind alle a_n gleich eins; die b_n gleich x^k)

$x = 0.1 : 1 + 0.1 + 0.01 + \dots$ konvergiert, s.o.

$x = 2 : 1 + 2 + 4 + \dots$ divergiert, kein

Grenzwert existiert

(Geometrische Reihe, konvergiert bei $|x| < 1$, divergiert bei $|x| \geq 1$)

1.2.1 Das Konvergenzkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert für $x = x_1$,

$\Rightarrow |a_n x_1^n| \leq C \quad \forall n$ (wobei C eine geeignete Konstante ist, $a_n x_1^n$ kann nicht beliebig wachsen für $n \rightarrow \infty$, wenn die Reihe bei x_1 konvergent ist, für n gross genug muss $|a_n x_1^n|$ sogar beliebig klein werden)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \left(\frac{x}{x_1}\right)^k$$

\downarrow Betrag $\leq C$

\downarrow Betrag ≤ 1 wenn $|x| < |x_1|$

\Rightarrow jeder Term von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist betragsmässig kleiner als Term

$$\sum_{k=0}^{\infty} C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k = C \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{mit } q = \left| \frac{x}{x_1} \right|$$

ISG: Beweis: $B_n = \sum_{k=0}^n q^k$
 $\Rightarrow (1-q)B_n = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$
 $B_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

(konvergente geometrische Reihe für $|x| < |x_1|$)

konvergiert eine Reihe also bei $x = x_1$, konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_1|$. Geht man über die einzelnen Schritte dieses Arguments mit $x, a_k \in \mathbb{C}$, folgt

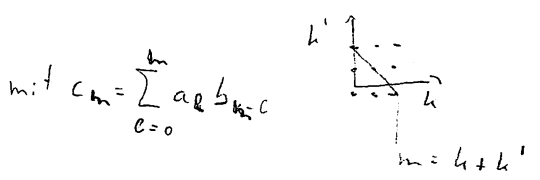
Zu jeder (komplexen) Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gibt es ein $\rho \in [0, \infty]$, mit der Eigenschaft, dass die Reihe für $|x| < \rho$ konvergiert und für $|x| > \rho$ divergiert. ρ ist der Konvergenzradius der Reihe.

Über das Verhalten der Potenzreihe bei $x = \rho$ macht diese Satz keine Aussage, dort gibt es auch kein allgemein gültiges Verhalten (es gibt Reihen die direkt am Konvergenzradius konvergieren, divergieren, oder an einzelnen Punkten konvergieren an anderen divergieren).

Ausblick (ohne Beweise)

- Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heisst absolut konvergent, wenn auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist jede Reihe absolut konvergent.
- Absolut konvergente Reihen dürfen Glied für Glied multipliziert werden

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$



• eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heisst gleichmäßig konvergent in einem Bereich D wenn

$$\forall x \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right| < \epsilon$$

(gesamte Funktion bleibt in einem ϵ -Schlauch)

Innerhalb des Konvergenzradius konvergieren Potenzreihen gleichmäßig.

Gleichförmig konvergente Potenzreihen dürfen gliedweise integriert und differenziert werden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \sum_{k=0}^n a_k x^k = \int dx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k ; \quad \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Notatorische Einschluss $f(x) \in o(g(x))$ bedeutet $0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

$f(x) \in o(g(x))$ bedeutet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$x^2 + 3x \in O(x^2)$
 $x^2 + 3x \in o(x^3)$

Beispiele $\bullet f(x) = \sin(x)$ gilt bei $x=0$ 0
 $f'(x) = \cos(x)$ " " 1
 $f^{(2)}(x) = -\sin(x)$ " " 0
 \vdots

$\Rightarrow f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
 $= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$

Konvergenzradius ∞ !

Mehr zum Konvergenzradius:

Formel von Cauchy-Hadamard folgt aus Wurzelkriterium:

$\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)|} = |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ am Konvergenzradius für $n \rightarrow \infty$

wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ $\Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{L} = r$!

Wurzelkriterium: gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ für Reihe

$\Rightarrow |a_n| \leq c^n$ mit konvergenter Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}$ als Majorante

1.3 Taylorreihen

Ursprüngliches Ziel bei der Einführung von Potenzreihen war gewesen, allgemeine Funktionen als Potenzreihe darzustellen

$$f(x) = \sum_k a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

innerhalb des Konvergenzradius der Reihe. Zunächst sind die Koeffizienten $\{a_k\}$ zu bestimmen.

$$k=0: f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = f(x) \Big|_{x=0}$$

$$k=1: \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = a_1 + 2a_2 x \Big|_{x=0} + 3a_3 x^2 \Big|_{x=0} + \dots = a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

$$k=2: \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x \Big|_{x=0} + \dots = 2a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=0}$$

⋮

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

Ist $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und

$x_0 \in (a,b)$ heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

die Taylorreihe bei x_0 ihre Koeffizienten die Taylorkoeffizienten von f bei x_0 .

Bringt man die Potenzreihe nach n Termen ab, besitzt

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

1.4

das Restglied der Reihe. $R_n(x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ ist eine verbreitete Notation.

" R_n ist von der Ordnung n "

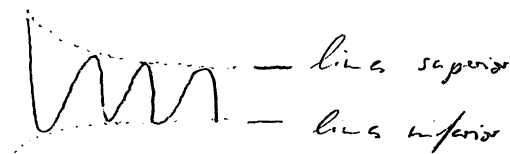
Einschub zu Notation des asymptotischen Verhaltens

$$f(x) \in O(g(x)) \quad (\text{oder genau auch } f(x) = O(g(x)))$$

bedeutet, daß sich $g(x)$ und $f(x)$ asymptotisch nicht "wesentlich" unterscheiden,

konkret
$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

lines superior



Beispiel: $4x^2 + 3x \in O(x^2)$ da $\frac{4x^2 + 3x}{x^2} \rightarrow 4$

$$f(x) \in o(g(x))$$

bedeutet, daß $f(x)$ im Vergleich zu $g(x)$ asymptotisch vernachlässigbar ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Beispiel $4x^2 + 3x = o(x^3)$ da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{x^3} = 0$

Physiker schreiben gerne $4x^2 + 3x = O(x^2)$... z. B.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

⋮

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

⋮

$$\Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

⋮

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Nimmt man diese drei Beispiele zusammen erhält man ein spezielles
Neu-Produkt

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0,2,4,\dots} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{(ix)^k}{k!}$$

Taylor-Reihe
bei 0

Aufspaltung in
k gerade und
ungerade

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

(Euler-Formel)

Euler-Formel zeigt eine tiefe Beziehung zwischen Trigonometrie und Exponentialfunktionen.
Sie ist auch von grosser praktischer Wichtigkeit, da sie erlaubt Oszillationen, wie
(cos(x)), mit der viel einfacher Exponentialfunktion darzustellen.

Beispiel: Additionstheorem

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

Realkteile beide Seite gibt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

1.4. Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen

musste die Zahlensystem

Ausgehend von der natürlichen Zahl M. mehrfach erweitert worden, um Lösungen bestimmter Gleichungen zu ermöglichen

- z.B. $3x = 7$ benötigt rationale Zahlen, natürliche Zahlen reichen nicht aus
- $x^2 = 2$ irrationale Zahlen
- $x + 7 = 3$ negative Zahlen
- $x^2 = -2$?

Komplexe Zahlen und \mathbb{R}^2

Im Vektorraum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Addition von Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$ Multiplikation mit Skalare $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$ definieren wir zusätzlich noch die Multiplikation von zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + ba' \end{pmatrix}$. (kommutativ)

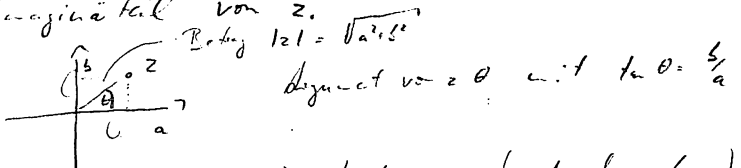
Diese Multiplikation

- hat ein Eins-Element $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- hat ein Inverses $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \frac{1}{a^2 + b^2}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- erlaubt Lösung von $x^2 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

} \Rightarrow Zahlensysteme

Wir schreiben $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als 1 und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als i . $z = a + ib \in \mathbb{C}$ wird als komplexe Zahl bezeichnet, a heißt Realteil, b der Imaginärteil von z .

(Multiplikation \Leftrightarrow Rot. um z übung)



Jede polynom. Gleichung n-ten Grades (mit komplexen Koeffizienten) hat n (i.A. komplexe) Lösungen.

1.4 Komplexe Funktionen

Bei der Betrachtung der Eulers-Formel haben wir angemerkt, daß

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, man läßt die Taylorreihe also ^{als eine} Funktion an sich komplexen Argument betrachten kann.

Weitere Beispiele

$$\cos ix = \frac{1}{2}(\cos ix + i \sin ix) + \frac{1}{2}(\cos(-ix) - i \sin(-ix))$$

↓
Potenzreihe erhält
nur gerade Terme, $\cos ix = \cos(-ix)$

↓
Potenzreihe erhält nur gerade Terme, $\sin ix = -\sin(-ix)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\cos ix + i \sin ix) + \frac{1}{2}(\cos(-ix) + i \sin(-ix)) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} \\ &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \cosh x \end{aligned}$$

analog

$$-i \sin ix = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

$\sinh x$, $\cosh x$ werden als "hyperbolischer Sinus" und "hyperbolischer Kosinus" bezeichnet, analog

daß $x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ als hyperbolischer Tangens

Wichtig einfach ist die komplexe Logarithmus, definiert durch die Gleichung

$$e^w = z$$

$\Rightarrow w = \log(z)$ für $w, z \in \mathbb{C}$.

Allerdings zeigt schon

$$e^{2\pi ki} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

$\Rightarrow e^w = 1 = z$ kann als $e^{w + 2\pi ki} = z$ geschrieben werden, d.h.

$$w' = w + 2\pi ki$$

ist ebenso eine Lösung von $e^w = z$ wie w .

\Rightarrow der komplexe Logarithmus ist nicht eindeutig; man erhält durch künstliche Beschränkung eine eindeutige Funktion:

$w = \log(z)$ ist der Hauptwert (des Logarithmus) wenn $z = e^w$ und $\operatorname{Arg}(w) \in [-\pi, \pi]$.

Nachteil: Sprung bei -1 ("branch cut")

2. Differentialgleichungen (DGL)

Einzelne Messungen können durch einzelne Zahlen beschrieben werden, die zugrundeliegende Prozesse sind jedoch meist durch Funktionen beschrieben

- Bahnkurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ eines Teilchens in 3D

- Potential $V(x, y, z)$ eines Ladungsverteilung

Diese Funktionen gehorchen oft Differentialgleichungen — d.h. Gleichungen in denen Ableitungen auftreten — und deren Lösungen Funktionen sind.
Praktisch die gesamte Physik bis ca. 1935 ist Naturbeschreibung mit Differentialgleichungen:

$$m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{x}, t) \quad \text{Newton II}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho(\underline{z}) \quad \text{eine der Maxwell Gleichungen}$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{x}, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(\underline{x}, t) + V(\underline{x}) \psi(\underline{x}, t) \quad \text{Schwingungsgleichung}$$

Warum immer DGL? Es scheint, dass die Natur "lokal" ist, so dass zur Vorhersage nur lokale Werte einer Funktion nötig sind (Stellung, Beschleunigung, ...)

2.1 Terminologie

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer Funktion ^{auftritt} heißt Differentialgleichung, die höchste Ordnung der Ableitung wird als Ordnung der DGL bezeichnet.

DGL, die Ableitungen nach nur einer Variable enthalten, heißen gewöhnliche DGL (z.B. Newton II), treten Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf spricht man von partieller DGL. Wir betrachten zunächst gewöhnliche DGL

für Funktionen einer reellen Veränderlichen $\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x)$

(y könnte eine Raumvariable sein, x die Zeit, ...)

In diesem Kontext ist eine lineare DGL eine Gleichung der Form

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) y(x) = f(x)$$

denn jede Term ist linear in $y(x)$. Wir schreiben daher auch mit

$$L \equiv a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)$$

die Gleichung als $L y = f$. Der Differentialoperator L ist linear, d.h.

$$L(y_1 + y_2) = L y_1 + L y_2$$

$f(x)$ bezeichnet man als die Inhomogenität der Gleichung; oft beschreibt $f(x)$ einen externen Einfluß auf ein System, z.B. in $\frac{d^2 y}{dt^2} = F(t)$ ← Inhomogenität

Ist $f(x) = 0$ (Nullfunktion) spricht man von einer homogenen DGL.

2.2 Linearität von L und ihre Konsequenzen

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer homogenen ^{linearen} DGL, d.h. $L y_1 = 0$
 $L y_2 = 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$

so ist $a y_1(x) + b y_2(x)$ auch eine Lösung der DGL (generell mit anderen Anfangsbed. als y_1 oder y_2):

$$L(a y_1 + b y_2) = a L y_1 + b L y_2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

- Sei $y_1(x)$ Lösung einer inhomogenen DGL, $L y_1 = f$
 $y_2(x)$ Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung $L y_2 = 0$

dann ist $y_1(x) + a y_2(x)$ eine weitere Lösung der inhomogenen Gleichung

$$L(y_1 + a y_2) = L y_1 + a L y_2 = f + a \cdot 0 = f$$

Wichtige Konsequenz: Real/Imaginärteile "komplexer" Lösungen sind ebenso Lösungen der linearen DGL.

z.B. $z(x) = z_R(x) + i z_I(x)$ sei eine komplexe Lösung der DGL mit $z_R(x), z_I(x) \in \mathbb{R}$: $L z = 0 = 0 + 0i$

$$\Rightarrow L(z_R + i z_I) = L z_R + i L z_I = 0 + 0i$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{Linearität} \\ \text{der DGL} \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} L z_R = 0 \\ L z_I = 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} L z_R = 0 \\ L z_I = 0 \end{matrix}} \right\} z_R, z_I \text{ sind ebenso Lösungen}$$

inhomogen DGL: $L z = f_z = f_R + i f_I \Rightarrow L z_R = f_R, L z_I = f_I$
 (oftmals ist die komplexe Lösung leichter zu bestimmen)

2.3 Gewöhnliche DGL erste Ordnung

Sind von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

(obdA kann Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ auf 1 gesetzt werden)

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda y \quad (\text{lineare homogene DGL erste Ordnung})$$

Radioaktiver Zerfall: die Zahl der pro kleinen Zeitintervall ^{in Mittel} zerfallenden Atomkerne ist proportional zur Zahl der vorhandenen Kerne $N(t)$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

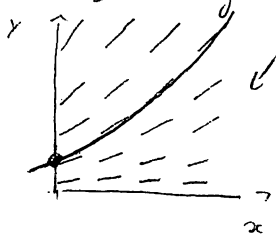
Ansatz: $y(x) = A e^{-\lambda x}$

$$\frac{dy}{dx} = A(-\lambda) e^{-\lambda x} = -\lambda y$$

Die Konstante A wird aus Anfangsbedingung (allg. Randbedingung) bestimmt:

$$y(0) = A e^{-\lambda \cdot 0} = A$$

Graphische Darstellung



make the point closer!

"kleine Striche" mit Steigung $f(x, y)$

- Lösung zu gegebener Anfangsbedingung

=> intuitiv: stark am Anfang und folgt den Strichen: DGL und Anfangsbedingung legen die Lösung fest

2.3.1 Eindeutigkeit

Die wichtigste Frage an dieser Stelle ist: wie allgemein ist dieses Verhalten?

Legt die DGL und AB die Lösung fest?

Satz: Sei eine DGL $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ auf einem Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ definiert, so daß ein ^{kollektives} $L > 0$ existiert so dass

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}| \quad \forall x, y, \tilde{y} \text{ auf diesem Rechteck}$$

so sind zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die bei einem $x = x_0$ denselben Wert haben, gleich: wenn $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ dann $y_1(x) = y_2(x)$ auf (a, b) . (Lipschitz Bedingung)

Da die Lipschitz Bedingung in der Praxis fast immer erfüllt ist (Mathe führt auf ^{DGL mit eindeutiger DGL mit eindeutiger DGL} eindeutig) ist dieser Satz sehr mächtig: Haben wir es geschafft eine Lösung zu geben, so wissen wir, dass keine weiteren Lösungen existieren! (Existenz der Lösung lässt sich ebenso unter sehr allgemeinen Bedingungen zeigen)

2.3.2 Lineare DGL erster Ordnung: homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = 0$$

$$y' = -\frac{dy}{dx} + a(x)$$

(gleich dem einfachen Beispiel $\frac{dy}{dx} = -1y$, nur dass 1 nun von x abhängt)

Ansatz $y(x) = y(0) \exp \left\{ - \int_0^x dx' a(x') \right\} = y(0) e^{-A(x)}$ (gleich e^{-1x} für $a(x)=1$)

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{y(0)}_{y(x)} \exp \left\{ - \int_0^x dx' a(x') \right\} = \frac{dy}{dx} \left(- \int_0^x dx' a(x') \right)$$

$$= -a(x) y(x)$$

"complementary function" $y(x)$

2.3.3 Lineare DGL erster Ordnung: inhomogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x)$$

Wir vermuten eine Lösung, die wieder den Term $e^{-A(x)}$ enthält und versuchen den Ansatz $y(x) = c(x) e^{-A(x)}$ mit noch zu bestimmendem $c(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = c'(x) e^{-A(x)} - a(x) c(x) e^{-A(x)} = c'(x) e^{-A(x)} - a(x) y(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = c'(x) e^{-A(x)} \stackrel{!}{=} f(x)$$

DGL

$$\Rightarrow c'(x) = e^{A(x)} f(x)$$

$$c(x) = \int_0^x dx' e^{A(x')} f(x')$$

$$\Rightarrow y(x) = c(x) e^{-A(x)} = \int_0^x dx' e^{-A(x) + A(x')} f(x')$$

$$= \int_0^x dx' G(x, x') f(x')$$

$$G(x, x') = e^{-A(x) + A(x')}$$

Jede Änderung von $f(x')$ mit $0 < x' < x$ ändert also die Lösung von $y(x)$, wobei $G(x, x')$ den "Einfluss" von $f(x')$ auf $y(x)$ angibt. $G(x, x')$ heißt Green-Funktion der DGL und wir werden darauf noch ausführlich zurückkommen.

Bei der Lösung der inhomogenen Gleichung fällt uns auf, dass bei $y(x) = \int_0^x dx' e^{-Ax'} + A(x')^{-1} f(x')$

keine Möglichkeit besteht AB zu wählen, $y(0)$ ist null!

Wir können jedoch (\mathcal{L} ist linear) zu Lösung der inhomogenen Gleichung $\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$ addieren, und erhalten eine weitere Lösung der DGL mit anderen Anfangsbedingungen! Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \underbrace{y(0) e^{-Ax}}_{\text{Lösung des homogenen Systems}} + \underbrace{\int_0^x dx' e^{-Ax'} + A(x')^{-1} f(x')}_{\text{"Partikuläre Lösung"}}$$

Lösung des homogenen Systems

(Einfluss von AB kann erwartungsgemäß abgelesen)

"Partikuläre Lösung"

2.3.4 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen für mehrere Variablen y_1, y_2, \dots heißen gekoppelt, wenn y_1, y_2, \dots alle jeweils in den Gleichungen für die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots$ auftreten, also

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, x)$$

$$\text{Vektorschreibweise} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, x)$$

Lösungen sind wieder eindeutig wenn eine Lipschitz-Bedingung erfüllt ist. Die Vektorschreibweise suggeriert eine Lösung zu zwei Anfangsbedingungen $y_1(0)$ und $y_2(0)$ indem man in 3D Raum y_1, y_2, x den "Strich" in mit Steigung \mathbf{f} folgt. Wichtige Anwendung: DGL höherer Ordnung können als gekoppelte DGL niedriger (erste!) Ordnung geschrieben werden (was die Lösung aber nicht einfacher macht).

Beispiel: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t)$ lineare DGL 2^{te} Ordnung

Definiere $v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und wir erhalten für die obige DGL

$$m \frac{dv}{dt} = F(x, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

} zwei gekoppelte DGL erste Ordnung

Damit haben auch (praktisch) alle DGL n-ter Ordnung eindeutige Lösungen, bis auf n Anfangsbedingungen (Bsp: Ort, Geschwindigkeit für Newton II)

3.4 Gewöhnliche lineare DGL zweite Ordnung

sind von der Form $\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = f(x)$

Wir beschränken uns auf den Fall mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: Eine Masse m an einer Feder mit Stärke k bewegt sich in 1D durch eine viskose Flüssigkeit (Reibungskraft proportional zu Geschwindigkeit) und wird von einer externen Kraft $F_{ext}(t)$ getrieben

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_{ext}(t)$$

gedämpfte getriebene harmonischer Oszillator

oder

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t)$$

$$b = \gamma/m$$

$$c = k/m$$

$$f(t) = F_{ext}(t)/m$$

Wir bleiben bei der Notation $x = x(t)$, da DGL zweite Ordnung oft mit der Zeit t als abhängige Variable angesetzt, bzw. sich gut mit temporale Effekte illustrieren lassen.

3.4.1 Gedämpfte harmonische Oszillatoren (homogene Gleichung)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c x(t) = 0 \quad b, c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 0$$

oder

$$\mathcal{L} x = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = \operatorname{Re} \left(A e^{i\omega t} \right) \quad \text{mit } A, \omega \in \mathbb{C}$$

Satz: Sei $(\exists) x(t) = x_R(t) + i x_I(t)$ eine komplexe Lösung einer linearen DGL

$$\mathcal{L} x = f, \quad \text{dann ist} \quad x_R(t) \in \mathbb{R} \quad \text{eine Lösung von } \mathcal{L} x_R = \operatorname{Re}(f)$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \mathcal{L} x &= \mathcal{L} (x_R + i x_I) = \mathcal{L} x_R + i \mathcal{L} x_I \stackrel{\text{DGL}}{=} f_R + i f_I \\ &\Rightarrow \mathcal{L} x_R = f_R \end{aligned}$$

Wir suchen daher zunächst nach komplexen Lösungen, und nehmen zum Schluss dann den Realteil.

In unserem Fall beschreibt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(A e^{i\omega t} \right) &= \operatorname{Re} \left((A_R + i A_I) e^{i(\omega_R + i\omega_I)t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left((A_R + i A_I) e^{i\omega_R t - \omega_I t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(A_R \cos \omega_R t - A_I \sin \omega_R t + i(\dots) \right) e^{-\omega_I t} \\ &= A \cos(\omega_R t - \phi) e^{-\omega_I t} \end{aligned}$$

eine gedämpfte harmonische Schwingung, jedoch erleichtert die komplexe Exponentialfunktion die Rechnung erheblich:

$$\frac{d}{dt} e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad \Rightarrow \text{Produktregel, trigonometrische Identitäten}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad \Rightarrow \text{Formelwust}$$

Vergleich

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

\Rightarrow einfach und elegant, kommt bei allen linearen DGL zum Anwendung 2.7

Für die homogene Gleichung $Lx=0$ gibt unser Ansatz $x = A e^{i\omega t}$

$$(-\omega^2 + i\omega b + c) A e^{i\omega t} = 0 \quad \forall t$$

\Rightarrow entweder $A=0$ (triviale Lösung) oder

$$-\omega^2 + i\omega b + c = 0$$

Quadratische Gleichung in ω mit 2 Lösungen

$$\omega_{\pm} = \frac{-ib \pm \sqrt{-b^2 + 4c}}{-2} = \frac{i}{2} b \pm \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2}$$

Für den Fall $b=0$ (physikalisch: keine Reibung) erhalten wir $\omega_{\pm} = \pm \sqrt{c}$
 $= \pm \sqrt{k/m}$,
 $= \pm \omega_0$

die allgemeine Lösung für $b=0$ ist also

$$x(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}$$

ihre Realteil kann als

$$x_r(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{harmonische Schwingung})$$

geschrieben werden, A und ϕ sind aus Anfangswert + Anfangsgeschwindigkeit zu bestimmen.

$b \neq 0$ Fallunterscheidung für 3 Fälle mit ansteigendem b (wachsende Dämpfung)

1. $4c - b^2 > 0$

$$\omega_{\pm} = \pm \omega_R \pm i\omega_I \quad \text{mit } \omega_R = \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2} = \sqrt{c - \frac{1}{4}b^2}, \quad \omega_I = \frac{b}{2}$$

$$x(t) = A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t}$$

mit Realteil

$$A e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad (\text{gedämpfte harmonische Schwingung, kleinere Frequenz als } b=0)$$

2. $4c - b^2 = 0$ (sogenannt kritische Dämpfung)

$$\omega_{\pm} = \frac{i}{2} b = i\omega_c$$

Wir erwarten noch eine zweite Lösung, genaue Betrachtung von $4c \rightarrow b^2$

gibt

$$\lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} \frac{e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t}}{i\omega_+ - i\omega_-} = \lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} e^{i\omega_+ t} \frac{1 - e^{i(\omega_- - \omega_+)t}}{i\omega_+ - i\omega_-} = e^{i\omega t} \lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} \frac{1 - (1 + i(\omega_- - \omega_+)t + \dots)}{i\omega_+ - i\omega_-} = t e^{i\omega t}$$

Summe von Lösungen \Rightarrow Lösung

NB: Zill do AB vs. komplex Lsg

$$(\exists) y(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}$$

$$= (A_+ + A_-) \cos \omega t + i(A_+ - A_-) \sin \omega t$$

$$\text{new Variable } a_c = A_+ + A_- \quad \in \mathbb{C}$$

$$a_s = A_+ - A_- \quad \in \mathbb{C}$$

$$= a_c \cos \omega t + i a_s \sin \omega t$$

$$= \underbrace{(a_c^R \cos \omega t - a_s^I \sin \omega t)}_{A \cos(\omega t - \phi)} + i (a_c^I \cos \omega t + a_s^R \sin \omega t)$$

$$A \cos(\omega t - \phi)$$

Die allgemeine Lösung für diesen Fall ist also

$$x(t) = A e^{-\omega t} + B t e^{-\omega t} \quad \omega = b/2 \in \mathbb{R}$$

mit 2 freien Parametern (Realteile von A und B).

Physikalisch beschreibt diesen Fall ein exponentielles Abklingen der Bewegung, ohne Oszillation.

3. $4c - b^2 < 0$ (überdämpfte Oszillation)

$$\omega_{\pm} = \frac{i}{2} b \pm \frac{i}{2} \sqrt{|4c - b^2|} = \frac{i}{2} (b \pm \sqrt{b^2 - 4c}) =$$

Allgemeine Lösung

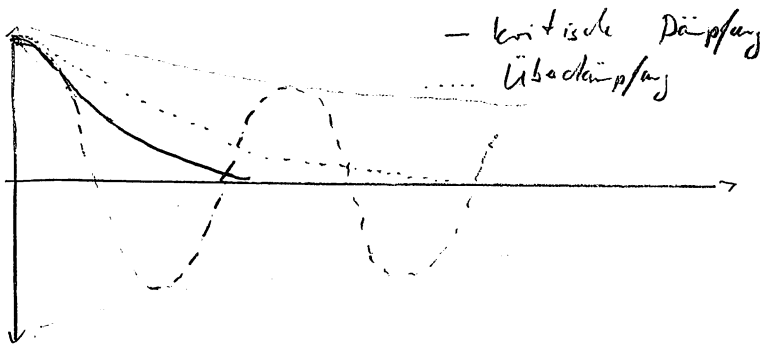
$$y(t) = A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t} = A_+ e^{-\omega_{+I} t} + A_- e^{-\omega_{-I} t}$$

Physikalisch ($b > 0$) beschreibt diesen Fall ein exponentielles Abklingen ohne Oszillation, allerdings (bei konstantem c) langsamer als in Fall 2:

$$\omega_{-I} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < \frac{b}{2} \equiv \omega_{cI}$$

(Imaginärteil von ω_c bei kritischer Dämpfung)

(ω_{+I} klingt schnell ab, bei langer Zeit ist der A_+ -Term dann vernachlässigbar)



--- Unter-dämpfung (Oszillation) ("overshooting")

Abfall der Einhüllenden $e^{-\omega_{+I} t} = e^{-bt/2} = e^{-t/\tau}$

$$\tau = \frac{2}{b}$$

Oszillationsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega_R} = \frac{2\pi}{\sqrt{c - \frac{1}{4}b^2}}$

Realteil von $A e^{-\omega t} + B t e^{-\omega t}$ ist $\omega \in \mathbb{R}$

$$(A_R + B_R t) e^{-\omega t}$$

3.4.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator (inhomogene Gleichung)

$$\mathcal{L}x = f \quad y = \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c$$

Physikalisch beschreibt $f(t)$ eine externe physikalische Kraft, die das System antreibt, z. B. eine Schraube die in regelmäßige Abstände angestossen wird, eine Brücke unter stonardigen Winkeln oder Schritten eines Fußgängers.

Auch für den harmonischen Oszillator existiert wieder eine Greenfunktion, so daß wir für beliebige $f(t)$

$$x(t) = \int_0^t dt' G(t, t') f(t') + x_{\text{homogen}}(t)$$

berechnen können - dies bleibt jedoch einem späteren Kapitel vorbehalten.

Wir erinnern uns an das allgemeine Vorgehen

- spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden (es gibt nur eine!)
- Lösung der homogenen Gleichung mit freien Parametern addieren (hier 2)
- freie Parameter aus Anfangsbedingungen bestimmen

Die Lösung der homogenen Gleichung haben wir bereits behandelt.

Zur speziellen Lösung von $\mathcal{L}x = f$ existiert wieder eine Greenfunktion

$$x(t) = \int_0^t dt' G(t, t') f(t')$$

so dass wir $x(t)$ für beliebige $f(t)$ berechnen können (wenn wir das Integral ausrechnen können). Dies bleibt jedoch einem späteren Kapitel vorbehalten.

Wir betrachten hier zwei instructive Spezialfälle

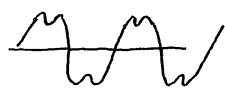
1. konstante externe Kraft

$$\frac{d^2}{dt^2} x + b \frac{d}{dt} x + c x = f = \text{const.}$$

$$\Rightarrow x(t) = f/c \quad \text{ist die spezielle Lösung}$$

Nach Ableiten der Lösung der inhomogenen Gleichung ist ein Gleichgewicht bei f/c erreicht.

2. Sinusförmige externe Kraft

↳ dient auch als Näherung für nicht-sinusförmige periodische Kraft 

- bel. pos. Kraft kann als Reihe sinusförmiger Schwingungen mit unterschiedlichen Amplituden geschrieben werden. $Lx = f_1 + f_2 + \dots$ hat Lösung $x_1 + x_2 + \dots$ mit $Lx_1 = f_1$
 $Lx_2 = f_2$
 \vdots

⇒ Fourier-Transformation im späteren Kapitel.

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + c x(t) = A \cos \bar{\omega} t$$

↳ Frequenz der externen Kraft

Wir nutzen wieder $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$ und lösen

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + c x(t) = A e^{i\bar{\omega} t}$$

nach $x(t) \in \mathbb{C}$, nehmen dann ob. Realteil (L ist linear!).

Ansatz $x(t) = B e^{i\Omega t}$, mit unbestimmtem Ω , gilt

$$\underbrace{(-\Omega^2 + i\Omega b + c)}_{\text{konstant in } t} B e^{i\Omega t} = A e^{i\bar{\omega} t} \quad \forall t$$

|
|
|

Oszillation mit Kreisfrequenz Ω
Oszillation mit Kreisfrequenz $\bar{\omega}$

$$\Rightarrow \Omega = \bar{\omega}$$

$$(-\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b + c) B = A$$

$$B = \frac{A}{c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b} = R e^{-i\phi} A \quad R, \phi \in \mathbb{R}$$

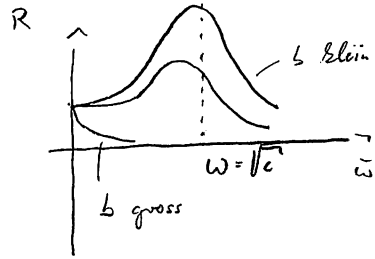
$$R = \left| \frac{1}{c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b} \right| = \frac{1}{|c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b|} = \left((c - \bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 b^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\phi = +\arctan \left(\frac{\bar{\omega}b}{c - \bar{\omega}^2} \right)$$

R und ϕ geben Amplitude und Phase relativ zum externen Kraft an. Der reelle Teil von $x(t) \in \mathbb{R}$ ist

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(B e^{i\bar{\omega}t} \right) = \operatorname{Re} \left(R e^{-i\phi} A e^{i\bar{\omega}t} \right)$$

$$= R A \operatorname{Re} \left(e^{-i\phi + i\bar{\omega}t} \right) = R A \cos(\bar{\omega}t - \phi)$$



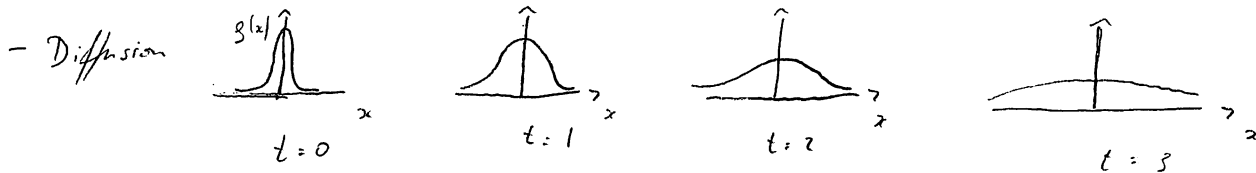
"Resonanzkurve"

Für $b=0$ hat R eine Singularität bei $\bar{\omega} = \sqrt{c} = \sqrt{k/m} = \omega$ (natürliche Oszillationsfrequenz, für kleine b wird R nahe ω sehr gross (Tacoma bridge))

3.5 Partielle Differentialgleichungen (PDGs)

Differentialgleichungen mit Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen werden als partielle Differentialgleichungen bezeichnet (im Gegensatz zu gewöhnlichen DGL, die nur Ableitungen nach einer Variable enthalten). Die Klassifizierung nach Ordnung, linear/nichtlinear ist analog zu gewöhnlichen Gleichungen.

PDGs treten bei der Beschreibung von Feldern auf, die sich in der Zeit verändern, sowie bei Feldern im 2, 3, ... D Raum



Teilchenkonzentration zur Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$ $\frac{\partial}{\partial t} \rho = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho$

- Schwingungs-Gleichung $i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$

- Elektrodynamik $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ $\phi(x, y, z)$ beschreibt das elektrische Potential in einer Region ohne Ladung

Diese Gleichung beschreibt auch das Gravitationspotential im leeren Raum, die Gleichgewichtverteilung der Temperatur im Raum ohne Wärmeleitungsquelle etc. Sie heißt Laplace Gleichung

- Wellengleichung $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

PDG sind i.A. schwer zu lösen, Theorie und Anwendung von PDG ist ein aktives Forschungsgebiet der angewandten Mathematik. Keine allgemeine Theorie für Existenz und Eindeutigkeit, jede PDG muss einzeln untersucht werden. (Navier-Stokes Gleichung der Hydrodynamik ist eines der "Millennium-Probleme" mit 10⁶ US \$ Preisgeld.) (Wir gehen jedoch davon aus, dass zu physikalisch relevanten PDG einjährige Lösungen existieren!)

gleichmässiger Längener
 $= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$
 sind leicht vertauschbar

3.5.2 Randbedingungen

Bei gewöhnlicher DGL n-ter Ordnung, wo die Lösung durch n Anfangsbedingungen festgelegt (oder durch eine Kombination von Anfang-, Mittel-, Endbedingungen). Bei PDE ist die Situation komplizierter, Randbedingungen können eine Lösung $\phi(x, t)$ oder $\phi(x, y, t)$ auf Punkten, Kurven, Flächen des Raumes (x, y, t, \dots) festlegen.

- Wellengleichung in 1D

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

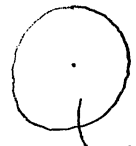


z.B. mit Randbedingung $\phi(x, t) = \phi(L, t) = 0 \forall t$

- Wellengleichung in 2D

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

zur Beschreibung einer Trommel
 auf Rand $x^2 + y^2 = R$
 ist $\phi = 0$
 innerhalb des Rands
 gilt Wellengleichung



=> Übung

3.5.3 Separationsansatz

Wichtige Lösungsmethode, die viele physikalisch motivierte PDE auf mehrere gewöhnliche DGL zurückführt.

Beispiel Wellengleichung 1D

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

mit Randbedingung $\phi(x=0, t) = 0$
 $\phi(x=L, t) = 0$

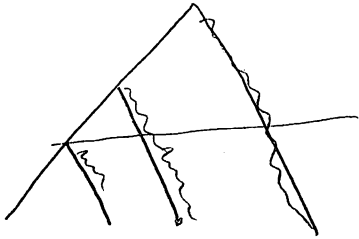
Ansatz $\phi(x, t) = f(x) g(t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x) g(t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f(x) g(t))$$

$$g(t) \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{c^2} f(x) \frac{d^2}{dt^2} g(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x)}_{\text{Funktion von } x} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{1}{g(t)} \frac{d^2}{dt^2} g(t)}_{\text{Funktion von } t}$$

$$\div \phi(x, t) = f(x) g(t)$$



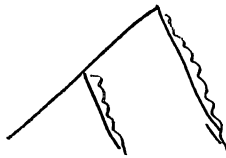
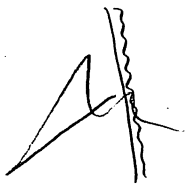
$$4N S_n = \sum_{i=2}^n \frac{4N}{i(i-1)} = 4N \frac{n}{n-1}$$

$$= 4N \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{5 \times 4} \dots \right)$$

$$S_0 + S_1 + \dots = \sum$$

prob of at least one mutation is $e^{-u \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}$
 constant rate c_i

prob. of at least one mutation i or give prob $\frac{c_i u}{c_i + u}$



prob of at least one mutation



expected number of mutations $T_2 u$

prob of no mut. $e^{-T_2 u}$

prob of at least one $1 - e^{-T_2 u}$



$$\left[1 - e^{-T_2 u} \right] + \left[1 - e^{-[T_2 + T_3] u} \right]$$

$$\left\langle e^{-T_2 u} \right\rangle = \frac{u}{c_2 + u} + \frac{u}{c_3 + u} \dots$$

$$\left\langle 1 - e^{-T_2 u} \right\rangle = \frac{c_2}{c_2 + u} + 1 - \frac{u}{c_2 + u} - \frac{u}{c_3 + u} \dots$$

$$\frac{2c_2}{c_2 + u} \left[1 - \frac{u}{c_2 + u} \right] + 1 - \frac{u}{c_2 + u} - \frac{u}{c_3 + u}$$

Rechte und linke Seite hänge jeweils nur von x , bzw. t ab, können also unabhängig voneinander verändert werden. Damit die Gleichung ebenfalls für alle x, t gilt muss

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{g(t)} \frac{d^2}{dt^2} g(t) = \text{konstante} = \lambda$$

und somit

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lambda f(x)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) = -c^2 \lambda g(t)$$

Wird die Konstante positiv gewählt, erhält man 'unphysikalische' Lsg. \Rightarrow Übung

2 gewöhnliche DGL statt einer PDG!

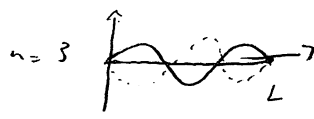
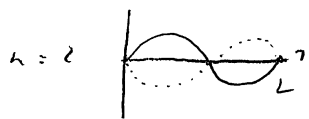
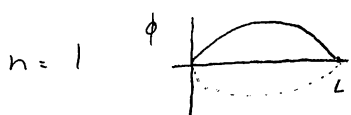
Die DGL lassen sich leicht lösen, $f(x) = A \sin(kx)$ mit $kL = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ löst DGL und Randbedingungen. $\lambda = -k^2$

$$g(t) = B e^{i k c t} = B e^{i \omega t} \quad \omega = kc$$

Die Konstante $-k^2 = \lambda$ bleibt dabei unbestimmt, jedes $k = \frac{\pi n}{L}$ löst DGLs + Randbed.!

Da PDG linear ist, können wir wieder verschiedene Lösungen addieren und erhalten eine neue Lösung, also allgemein

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{i \frac{\pi n}{L} c t}$$



zeigt die ersten drei Töne. Jede dieser Lösungen schwingt mit eigener Frequenz, und ihr Verhalten in x, t ist unabhängig von der Phase weiterer Töne

(sogenannte Normalmode des Systems, obwohl wir noch mehrfach begegnen werden)

Ausblick:

Die Werte der $\{C_n\}$ werden nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt

z.B.

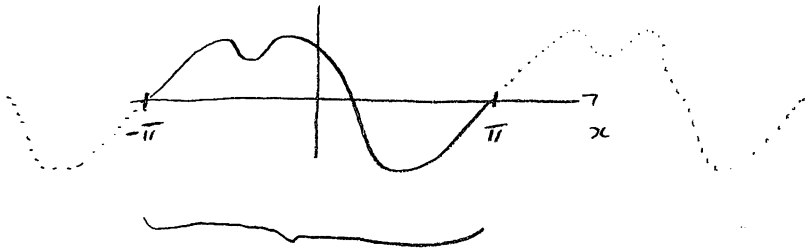
nicht sinusförmig, beliebig? Summe von Sinusfunktionen

\Rightarrow Fourierreihe, letztes Kapitel

6. Fourierreihen

Kernidee: (Fast alle) periodischen Funktionen lassen sich als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen schreiben.

z.B. sei $f(x)$ periodisch mit Periode 2π



Wir brauchen $f(x)$ nur auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zu kennen

$\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$

haben alle dieselbe Periodizität wie $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots \\ + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

(Fourier, 1807)

- Fragen:
- wie kann man die $\{a_n, b_n\}$ bestimmen? (sind sie eindeutig?)
 - wann existiert und wann konvergiert die Reihe?
 - stimmt die Reihe überall mit $f(x)$ überein?

Anwendung: • DGL, z.B. getriebene harmonische Oszillatoren: gelöst für sinusförmige Antriebskraft. Wenn wir eine beliebig periodische Antriebskraft als Summe von Kosinus und Sinusfunktionen schreiben, können wir die DGL für jeden Term separat lösen und (lineare DGL) die Lösungen addieren!

$$\mathcal{L} y(t) = f(t) = a_0 + a_1 \cos x + \dots \\ + b_1 \sin x + \dots$$

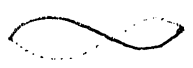
$$\mathcal{L} y_0 = t_0$$

$$\mathcal{L} y_{a_1}(t) = \cos x$$

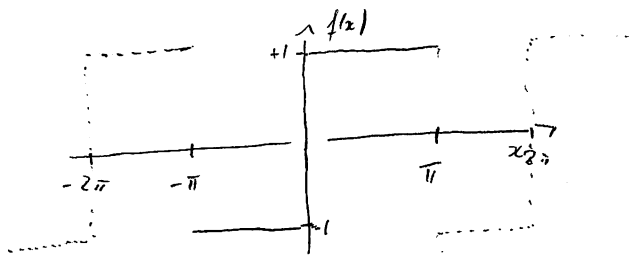
$$\mathcal{L} y_{b_1} = \sin x$$

$$y(t) = a_0 y_0 + a_1 y_{a_1}(t) + \dots$$

$$+ b_1 y_{b_1}(t) + \dots$$

- partielle DGL z.B. Wellengleichung. Wir hatten Lösung für sinusförmige Anfangsbedingung gefunden . Beliebige AB lässt sich als Summe von Sinusfunktionen schreiben.
- Funktion als Element eines Vektorraumes (Linearkombination von Funktionen ist eine Funktion): Sinus und Kosinus sind eine Basis aller reellen periodischen Funktionen.

Beispiel



$$\begin{aligned}
 f(x) &= -1 & -\pi < x < 0 & \text{ und periodisch mit Periode } 2\pi \\
 f(x) &= 1 & 0 < x < \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots \\
 &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

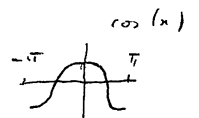
1. Bestimmung von a_0 :

Integriere rechte und linke Seite zwischen $-\pi$ und π

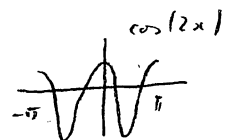
Links $\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \int_{-\pi}^0 dx (-1) + \int_0^{\pi} dx 1 = 0$

Rechts: a_0 Term: $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx a_0 = \frac{1}{2} \times 2\pi a_0 = \pi a_0$

a_1 Term $a_1 \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos x = a_1 \left[+\sin x \right]_{-\pi}^{\pi} = a_1 (0 - 0) = 0 a_1$



a_2 Term $a_2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(2x) = a_2 \left[+\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 a_2$



a_n Term $a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx = a_n \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 a_n$

$$b_n \text{ Term} \quad b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx = b_n \left[-\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad b_n$$

Sammelt man alle Terme erhält man

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \right]$$

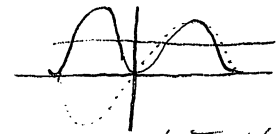
$$= \pi a_0$$

$\Rightarrow a_0 = 0$ eindeutig bestimmt!

2. Bestimmung von a_n, b_n

Wir brauchen folgende Integrale benötigt

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(kx) = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \quad k > 0$$



periodische Funktion mit Mittelwert $\frac{1}{2}$

(folgt aus $\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2 kx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2 kx$)

$$\text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos^2 kx + \sin^2 kx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \cdot 1 = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \cos lx = 0 \quad \forall k, l > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \sin lx = 0 \quad k \neq l$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos lx = 0 \quad k \neq l$$

z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos lx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \frac{1}{2} (e^{ilx} + e^{-ilx})$,

Ausmultiplikation gibt 4 Terme da Term $\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{imx} = \left[\frac{1}{im} e^{imx} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{im} (e^{im\pi} - e^{-im\pi})$

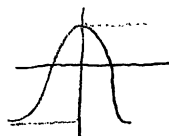
$$= \frac{1}{im} \sin m\pi = 0$$

$m \neq 0$

a_l : Multipliziere rechte und linke Seite mit $\cos lx$ und integriere von $-\pi$ zu π

Links $\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(lx) = 0$

\downarrow \downarrow
 ungerade gerade
 Funktion Funktion
 —————
 ungerade Funktion



Rechts: Beiträge von a_0 , $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ geben alle Null, bis auf

$$a_k \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos lx \quad \text{mit } k=l$$

$$= a_e \pi$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(lx) = a_e \pi \quad \Rightarrow \quad a_e = 0 \quad \forall l$$

b_e : Multipliziere rechte und linke Seite mit $\sin lx$ und integriere von $-\pi$ zu π

Links: $\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(lx) = - \int_{-\pi}^0 dx \sin(lx) + \int_0^{\pi} dx \sin(lx) = 2 \int_0^{\pi} dx \sin(lx) = -2 \left[\frac{1}{l} \cos lx \right]_0^{\pi} =$

$= + \frac{2}{l} \times \begin{cases} 2 & l \text{ ungerade} \\ 0 & l \text{ gerade} \end{cases}$

Rechts: Alle Beiträge geben Null, bis auf

$$b_k \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \sin lx \quad k=l$$

$$= b_e \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2 lx = \pi b_e$$

$$\Rightarrow b_e = + \frac{4}{l\pi} \quad l \text{ ungerade, null sonst}$$

Oder $f(x) = + \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$

$$= + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x)$$

\Rightarrow Fourier / squarewave - fourier series .h.s. pdf

6.1 Fourierkoeffizienten für eine allgemeine periodische Funktion

Eine Funktion $f(x)$ sei periodisch auf dem Intervall $(-L, L)$.

Ansatz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

$$+ b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots \quad (1)$$

Zur Berechnung von a_0 berechnen wir wieder den Mittelwert von $f(x)$ über eine

Periode L links Seite

rechte Seite

$$\int_{-L}^L dx f(x) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 2L + 0$$

$L \cos, \sin$ über eine oder viele Perioden integriert zu Null

$$= a_0 L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x)$$

Zur Berechnung von a_e ($e > 0$) berechnen wir den Mittelwert von $f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$

$$\int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) = a_e \int_{-L}^L dx \cos^2\left(\frac{\pi k x}{L}\right) = a_e \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx' \cos^2 k x' = a_e \frac{L}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = a_e L$$

rechte Seite, alle anderen Terme integrieren zu Null

substitution $x' = \pi x / L$

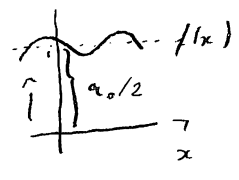
$$\Rightarrow a_e = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

$$\text{analog } b_e = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

$\frac{a_0}{2}$ ist eine Konvention um die Formel für a_0 den Formeln für a_e $e > 0$ ähnlich zu machen

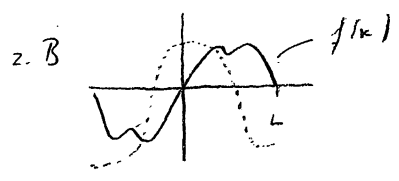
Die Reihe (1) mit diesen Koeffizienten a_e, b_e heißt Fourier-Reihe von $f(x)$

Induktion: • Da $\cos lx$, $\sin lx$ im Mittel über eine Periode Null gehen
 man $\frac{a_0}{2}$ gleich dem Mittel von f über eine Periode sein

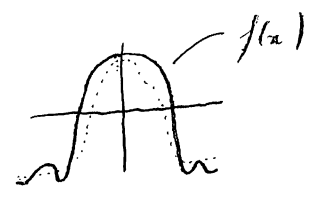


• $\int dx f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

gibt an wie "ähnlich" $f(x)$ der Funktion $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ ist



$f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ ist so oft positiv wie negativ \Rightarrow Integral ist null (oder klein)



hier ist $f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ entlang einer Periode meist positiv $\Rightarrow a_1$ ist gross

($f(x)$ ist gut durch $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ gemittelt)

In der Akustik noch $\cos\left(\frac{2\pi\omega}{T}t\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi\omega}{T}t\right)$... $\sin\left(\frac{2\pi\omega}{T}t\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi\omega}{T}t\right)$

als Overtöne einer periodischen Schwingung mit Periode T ("Ton") bezeichnet.

Der "Klang" des Tons wird durch die Overtöne bestimmt (brillanter vs dumpfer)

link www.uni-koeln.de/rozak/multimedia/obertonfunktion/schalls/akustik.html ? - D.

Formel: Fassen wir die Funktion $f(x)$ als Element des Vektorraums von Funktionen mit Periode L auf, kann man $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ als Basisvektoren betrachten.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots$$

$$+ b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots$$

cp. $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$
 / \
 Koeffizient Basisvektor

$$a_e = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$b_e = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi l x}{L}\right) = \delta_{kl}$$

CP $v_i = \langle e_i, v \rangle$

für Orthonormalsystem mit

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi l x}{L}\right), \sin\left(\frac{\pi l x}{L}\right)$ bilden ein Orthonormalsystem im Raum der Periodischen Funktionen. (Einschränkung s.u.)

Skalarprodukt $\left\langle \cos\left(\frac{\pi l x}{L}\right), \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{\pi l x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$

$$\Rightarrow a_l = \left\langle \cos\left(\frac{\pi l x}{L}\right), f(x) \right\rangle$$

$$b_l = \left\langle \sin\left(\frac{\pi l x}{L}\right), f(x) \right\rangle$$

6.1 Vollständigkeit der Basis: die Dirichlet Bedingung

Die Dirichlet Bedingung gibt an, wann eine Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine Funktion $f(x)$ punktweise gegen $f(x)$ konvergiert.

- welche Funktionen sind durch Fourierreihen darstellbar?

\Rightarrow für welche Art von Funktionen ist $\left\{ \cos \frac{\pi l x}{L}, \sin \frac{\pi l x}{L} \right\}$ eine Basis.

Theorem: Sei $f(x)$ im Intervall $[-L, L]$ quadratintegrierbar, d.h.

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx |f(x)|^2 < \infty$$

ist endlich, dann ist an "fast allen Punkten"

$f(x)$ gleich seine Fourierreihe.

(Carson, 1966)

An fast allen Punkten Lebesgue (groß): überall, bis auf einzelne Punkte.

Welche Punkte problematisch sein könnten, beschreibt das folgende Theorem

Theorem (Dirichlet-Bedingung, 1829)

Ist $f(x)$ periodisch mit Periode $2L$ und lässt sich in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist, und existieren an den Intervallgrenzen rechte und linke Grenzwert $f(x_+)$ und $f(x_-)$ konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ ^{punktweise} gegen

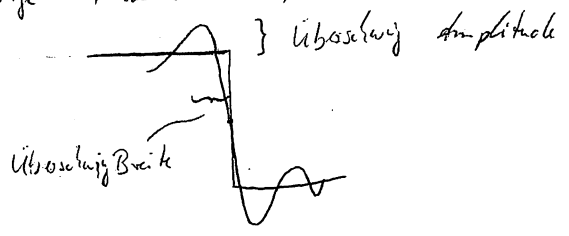
$$\begin{cases} f(x) & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ stetig ist} \\ \frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+)) & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ nicht stetig ist} \end{cases}$$

(\Rightarrow endlich Anzahl von Maxima, Minima, Sprünge ^{kein Divergenz}; Sprünge werden approximiert)

⚠ Gegenüber dieser Aussage stimmt nicht, einige Funktionen die die Dirichlet-Bedingung verletzen lassen ebenfalls konvergente Fourierreihen, (konvergenz = Mittel vs. punktweise konvergenz)

6.2 Das Gibbs-Phänomen

Approximiert man $f(x)$ durch eine endliche Fourierreihe fallen in der Nähe von Sprüngen starke Abweichungen zwischen $f(x)$ und der endlichen Fourierreihe auf (Problem: Approximation einer nicht-stetigen Funktion durch stetige Funktionen)



siehe figures / squarewave - fourier series

Diese "Überschläge" von ca. 9% des Sprungs (Rechteckwelle) nimmt in seiner Amplitude nicht ab wenn mehr Terme der Reihe berücksichtigt werden. Die Breite des overshoots nimmt aber mit zunehmender Zahl der Terme ab, und schrumpft mit $n \rightarrow \infty$ auf einen Punkt zusammen.

6.3 Komplexe Form der Fouri-Reihe

(hier Intervall $[-\pi, \pi]$)

Aus der Eulers-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ folgt

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Fouri-Reihe ein erhält man die komplexe Fouri-Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots$$

$c_n \in \mathbb{C}$

• Vergleich mit alter Schreibweise $\frac{1}{2} a_0 = c_0$, $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}$ $n > 0$

$$c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \quad n < 0$$

• für reelle $f(x)$ muss $c_{-n} = c_n^*$ gelten ($c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_n^* e^{-inx} \in \mathbb{R}$)

• oft ist die Fouri-Reihe in komplexer Form leichter zu berechnen.

Berechnung der Koeffizienten

$$c_0: \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = c_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)$$

c_n : multipliziere Reihe mit e^{-inx} und integriere über $[-\pi, \pi]$

$$\text{Rechts} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x)$$

$$\text{Links} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} c_n e^{inx} \quad + \text{Integriere über volle Periode oszillierender Funktionen } L_0$$

$$= c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

6.4 Parseval Theorem

verbindet $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$ mit den Betragswerten der Koeffizienten der Fourierreihe.

- bei einer Schwingung $y(t)$ gibt $\frac{1}{2}k \int_{-T}^T dt |y(t)|^2$ die mittlere potentielle Energie an. (Fedosteife k)

Wir bilden von

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

den Betragswert von beiden Seiten und integrieren über eine Periode

Linke Seite: $\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$

Rechte Seite: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \left(c_0^* + \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^* e^{-ilx} \right)$

alle Terme integrieren zu Null, ausser

$$c_0 c_0^*$$

$$c_n c_l^* e^{inx - ilx}$$

mit $l = n$

$$= 2\pi |c_0|^2 + 2\pi \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Interpretation
als Länge des Vektors
("L₂-Norm")

Summe der Betragswerte der Komponenten

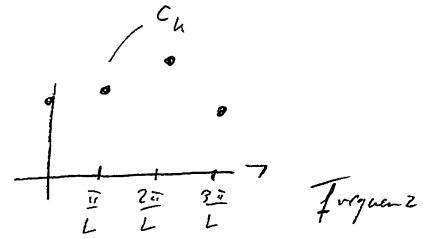
$$\text{cp} \quad \|v\| = \sum_k v_k^2$$

6.5 Ausblick: die Fourier-Transformation

Natürlich sind nicht alle Funktionen periodisch, bzw. sie haben im allgemeinen eine unendliche Periode. Die Fourier-Transformation ist die Verallgemeinerung der Fourier-Reihe für $L \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i k x \pi / L}$$

Oszillation mit Frequenz $\frac{k\pi}{L}$



→ im Limes $L \rightarrow \infty$ rücken die

• Frequenzen der Fourier-Reihe immer näher zusammen, aus c_n wird $c(k)$
 $k = n\pi/L$

• aus der Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ wird ein Integral

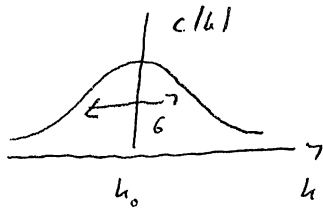
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} c(k)$$

$\tilde{f}(k) = c(k)$ heißt Fourier-Transformierte von $f(x)$.

Vgl:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} c_k$$

Beispiel: Wir betrachten ein $c(k)$ mit Mittelwert k_0 und Varianz σ^2



Gaußkurve $\tilde{f}(k) = c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2\right\}$ $\sigma > 0$

und berechnen die entsprechende $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2\right\}$$

Argument der Exponentialfunktion

$$ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k^2 - 2k_0k + k_0^2 - 2i\sigma^2 kx \right)$$

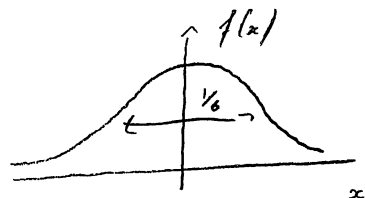
$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k^2 - 2k[k_0 + i\sigma^2 x] + [k_0 + i\sigma^2 x]^2 - [k_0 + i\sigma^2 x]^2 + k_0^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k - [k_0 + i\sigma^2 x] \right)^2 + \underbrace{ik_0x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}_{\text{hängt nicht von } k \text{ ab}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(k - [k_0 + i\sigma^2 x])^2} \times e^{ik_0x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$$

Substitution $k' = \frac{1}{\sigma}(k - [k_0 + i\sigma^2 x])$ gibt $\sqrt{2\pi}\sigma$

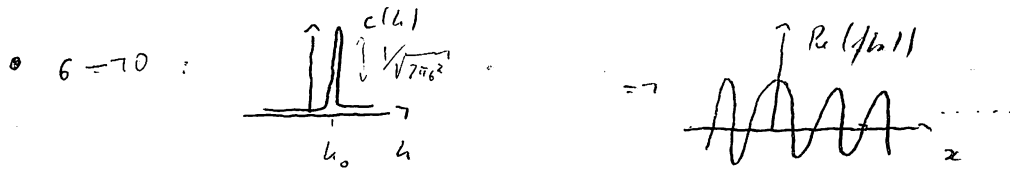
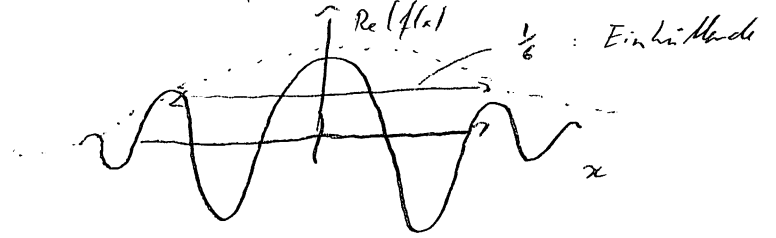
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + ik_0x\right\}$$



$\tilde{\omega} k_0 = 0$

• $k_0=0$: ist $c(k) \equiv \tilde{f}(k)$ eine breite Gausskurve ($\sigma \rightarrow 1$), ist $f(x)$ eine schmale Gausskurve (\Rightarrow Wellenl., AM)

• $k_0 \neq 0$: k_0 gibt die Wellenzahl an, mit der $f(x)$ oszilliert

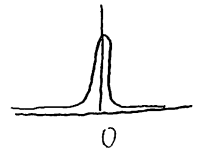


"einzelne Komponenten in Frequenzspektrum"

• Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ ("c(k) = \tilde{f}(k) enthält alle Frequenzen")

$k_0 = 0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} k^2} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2 x^2\right\}$$



" $\equiv \delta(x)$ "

$\delta(x)$ ist eine "Funktion" die überall null ist, bis auf $x=0$. Dennoch

ist $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$ (Integral existiert auch für $\sigma \rightarrow \infty$)

Da $\delta(x) = 0$ ausser $x=0$ ist auch $\int dx \delta(x-x_0) g(x) = g(x_0)$

FT von $\delta(x)$ ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, von $\delta(x-x_0)$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$

Im Limes $\sigma \rightarrow \infty$ ist $f(x)$ keine wohldefinierte Funktion. Da rigorose

Zugang definiert sogenannte Distributionen; Abbildungen von Funktionen auf die reellen Zahlen

$$g(x) \xrightarrow{\delta_{x_0}} g(x_0) \quad \int dx \delta(x-x_0) g(x) = g(x_0) \quad 6.13$$

6.5.1 Inverse Fourier Transformation

Wir nutzen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{ih(x-x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-\frac{1}{2}\epsilon h^2 + ih(x-x_0)}$$

analog zur Rechnung $\frac{1}{2\pi\epsilon} \int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon(x-x_0)^2 + ih(x-x_0)} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon(x-x_0)^2} e^{ih(x-x_0)}$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon}(x-x_0)^2\right\} = \delta(x-x_0)$$

Als nächstes zeigen wir, dass $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikh} f(x)$ die FT $\tilde{f}(h)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{+ikh} \tilde{f}(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{+ikh} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{+ikhx'} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{+ikh(x-x')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x') = f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{aligned} \tilde{f}(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikh} f(x) \end{aligned} \right. \quad \text{FT}$$

FT

inverse FT

$$\left\| \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dh e^{+ikh} \tilde{f}(h) \end{aligned} \right.$$

Anwendungen

Der Kern fast aller Anwendungen der FT in der Physik ist die Eigenschaft, dass die FT von $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ $+ ik \tilde{f}(k)$ ist.

(aus Ableitung nach x wird Multiplikation mit $-ik$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-ikx}$$

↳ wenn $f(x)$ integrierbar auf $[-\infty, \infty]$

$$= + ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx} = + ik \tilde{f}(k)$$

z.B.

$a u'' + b u' + c u(x) = g(x)$ DGL ($x \rightarrow t$ gibt harmon. Oszill.)

FT von rechter und linker Seite

$$-ak^2 \tilde{u}(k) + ikb \tilde{u}(k) + c \tilde{u}(k) = \tilde{g}(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{c + ikb - ak^2}$$

\Rightarrow inverse FT gibt Lösung der DGL!

$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,t)$ partielle DGL (Wärmeleitung)

mit Anfangsbedingung $\phi(x,t=0) = p(x)$

FT nach x , $\tilde{\phi}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi(x,t)$

auf linker Seite gibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\phi}(k,t) = -k^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(k,t) = V(k) e^{-k^2 t}$$

Bestimmung von $V(k)$ aus $\tilde{\phi}(k,t=0) = \tilde{p}(k) \Rightarrow \tilde{\phi}(k) = \tilde{p}(k) e^{-k^2 t}$