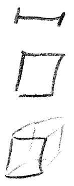
1.8 Die Determinante

Unter einer linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gleicher Dimension ($V \to V$) ändern sich Länge, Flächeninhalte, Volumina. Die Determinante einer LA gibt an, wie sich "verallgemeinerte Volumina" unter der Transformation ändern. Für einen "Einheitswürfel" mit Kantenlänge $1m$ in n Dimensionen ist dieses "Volumen" $1\,m^n$.

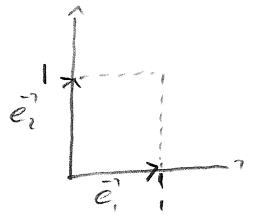
$n=1$: "Verallgemeinertes Volumen" : Länge

$n=2$: Flächeninhalt

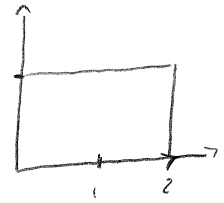
$n=3$: Volumen



Beispiel:



$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$

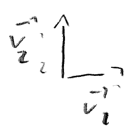


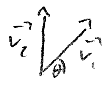
Das "verallgemeinerte Volumen" (im folgenden "Volumen" genannt) ändert sich und wird um einen Faktor 2 grösser.

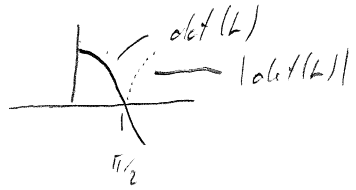
Die Determinante $\det(L)$ einer linearen Abbildung $L: V \to V$ ist das vorzeichenbehaftete Volumen der Abbildung des n-dimensionalen Einheitswürfels unter L.

Vorzeichenbehaftet bedeutet, dass die Determinante ihr Vorzeichen ändert, wenn die Einheitsvektoren ihre Orientierung ändern (z.B. von einem rechtshändigen auf ein linkshändiges System)

⌜Grund: $\det(L)$ ist so eine differenzierbare Funktion der Komponenten von $\underline{\underline{L}}$, z.B.







⌟

$\det(\underline{\underline{L}}) = \det(L)$ da $\underline{\underline{L}}$ L eindeutig definiert

Berechnung der Determinante (Spezialfälle $n=1,2,3$)

$n=1$ $\quad \underline{\underline{L}} = a$, die einzige Komponente von $\underline{x} = (a)$ ändert sich um den Faktor a , $\det \underline{\underline{L}} = a$ (negativ: Richtungswechsel)

$n=2$ $\quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, Abbildung des Einheitswürfels ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right|$ auf ; $\det(L) = ab - cd$

$n=3$ $\quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ vorzeichenb. Volumen des Parallelepipeds $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ist $\underline{u} \cdot \underline{v} \times \underline{w}$;

$$\det(L) = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

Berechnung der Determinante (allgemein)

Eine Abbildung vom Raum der Matrizen auf die reellen Zahlen, $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ heißt Determinante, wenn gilt

1. $\det(\underline{\underline{1}}) = 1$ Normierung

2. $\det \begin{pmatrix} \cdots & \lambda c_1 + \mu d_1 & \cdots \\ & \lambda c_2 + \mu d_2 & \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \cdots & c_1 & \cdots \\ & c_2 & \\ & \vdots & \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \cdots & d_1 & \cdots \\ & d_2 & \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

Multilinearität

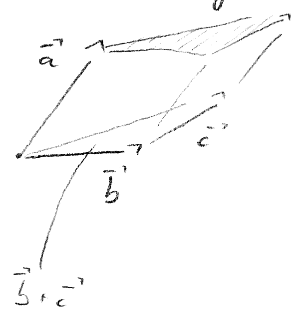
3. $\det \begin{pmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & & a_2 \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0$ die Determinante ist alternierend

Diese drei Forderungen können als Axiome verwendet werden: sie legen die Determinante eindeutig fest. (Es gibt nur eine Funktion die diese Forderungen erfüllt!)

Die drei Forderungen sind kompatibel mit geometrischen Überlegungen zur vorzeichenbehaft. Volumenänderung:

1. Normierung: Volumen ändert sich unter der Identitätsabbildung nicht
2. Multilinearität

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} b_1+c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & a_2 \end{pmatrix}$$



Das von $\vec{a}$, $(\vec{b}+\vec{c})$ aufgespannte Parallelogramm hat den gleichen Flächeninhalt wie die von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelogramme zusammen. (Grünes Dreieck oben ausschneiden und unten ansetzen.)

3. Stehen zwei Abbildungen unter L von unterschiedlichen Einheitsvektoren parallel aneinander, so ist der Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms null

und entsprechend in höheren Dimensionen

Aus diesen Forderungen folgen interessante Eigenschaften der Determinante sowie explizite Ausdrücke zu ihrer Berechnung (!)

1. Sind zwei Spalten von $\underline{\underline{L}}$ gleich ist $\det(\underline{\underline{L}}) = 0$ (siehe Punkt 3)
2. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten von $\underline{\underline{L}}$ vertauscht (Änderung der Orientierung!). Vereinfachte Notation zum Beweis $\det(\underline{a}_i, \underline{a}_k)$ ($\underline{a}_k$ in Position k; Spalte $\underline{a}_i$ an Position i)

$$0 \overset{3.}{=} \det(\underline{a}_i + \underline{a}_k, \underline{a}_i + \underline{a}_k) \overset{2.}{=} \det(\underline{a}_i, \underline{a}_i + \underline{a}_k) + \det(\underline{a}_k, \underline{a}_i + \underline{a}_k)$$

$$\overset{2.}{=} \det(\underline{a}_i, \underline{a}_i) + \det(\underline{a}_i, \underline{a}_k) + \det(\underline{a}_k, \underline{a}_i) + \det(\underline{a}_k, \underline{a}_k) \overset{3}{=} \det(\underline{a}_i, \underline{a}_k) + \det(\underline{a}_k, \underline{a}_i)$$

$$\Rightarrow \det(\underline{a}_i, \underline{a}_k) = -\det(\underline{a}_k, \underline{a}_i)$$

3. Die Determinante einer Matrix, deren Einträge in einer Matrix alle 0 sind, ist 0.

$$\det(\lambda \underline{a}_i) \overset{2.}{=} \lambda \det(\underline{a}_i) \overset{\lambda=0}{=} 0$$

Geometrisch: alle Vektoren in Richtung $\underline{e}_i$ werden auf den Ursprung komprimiert

4. Eine diagonale Matrix $\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ hat $\det(\underline{\underline{L}}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \overset{2.}{=} \lambda_1 \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \end{pmatrix} \overset{2.}{=} \dots = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \det(\underline{\underline{1}}) \overset{1.}{=} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Geometrisch: Streckung um λ_1 in Richtung $\vec{e}_1$, λ_2 in Richtung $\vec{e}_2$, ...

5. $\det(\lambda \underline{\underline{L}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda L_{11} & \lambda L_{12} & \dots \\ \lambda L_{21} & \lambda L_{22} & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \overset{2.}{=} \lambda^n \det \underline{\underline{L}}$

6. Die Determinante einer Matrix ist null, wenn eine der Spalten eine Linearkombination der anderen Spalten ist

e.g. $\underline{a}_1 = \sum_{i=2}^{n} c_i \underline{a}_i$ $\quad \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots) \overset{2.}{=} c_2 \det(\underline{a}_2, \underline{a}_2, \dots) + c_3 \det(\underline{a}_3, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \dots) + \dots$

$$\overset{\text{Punkt 1}}{=} 0$$

7. $\det(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{B}}) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} A_{\sigma(3)3} \dots A_{\sigma(n)n}$

$\sigma \in S_n$ ist eine Permutation
└ Gruppe der Permutationen von n Objekten

$$\begin{array}{ccl} 1 & & 2 = \sigma(1) \\ 2 & \xrightarrow{\sigma} & 4 = \sigma(2) \\ 3 & & 1 = \sigma(3) \\ 4 & & 3 = \sigma(4) \end{array}$$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ wenn die Zahl der Vertauschungen in die sich σ zerlegen lässt gerade/ungerade ist

$$\det(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{B}}\,\underline{a}_1, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_2, \dots, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_n) \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{i_1} \underline{b}_{i_1} A_{i_1 1}$$

$$= \det\left(\sum_{i_1} \underline{b}_{i_1} A_{i_1 1}, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_2, \dots, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_n\right)$$

$$\overset{2.}{=} \sum_{i_1} A_{i_1 1} \det\left(\underline{b}_{i_1}, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_2, \dots, \underline{\underline{B}}\,\underline{a}_n\right)$$

$$\overset{\text{wdh.}}{=} \sum_{i_1, i_2, \dots i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n} \det\left(\underline{b}_{i_1}, \underline{b}_{i_2}, \dots, \underline{b}_{i_n}\right)$$

Nach Punkt 6. ist jeder Term in dieser Summe Null, bei dem mindestens ein Paar der $i_1, i_2, \dots i_n$ gleich ist. Bei Termen die zur Summe beitragen ist also $i_1, i_2, \dots, i_n$ eine Permutation von $1, 2, \dots, n$.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1) 1} A_{\sigma(2) 2} \dots A_{\sigma(n) n} \det\left(\underline{b}_{\sigma(1)}, \underline{b}_{\sigma(2)}, \dots, \underline{b}_{\sigma(n)}\right)$$

Im letzten Schritt vertauschen wir die Spalten $b_{\sigma(1)} \dots b_{\sigma(n)}$ um sie in die Reihenfolge $1, 2 \dots, n$ zu bringen

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1) 1} A_{\sigma(2) 2} \dots A_{\sigma(n) n} \det\left(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n\right)$$

8. Für $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ folgt aus Punkt 7. <u>Leibnizsche Regel</u>

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}}) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1) 1} A_{\sigma(2) 2} \dots A_{\sigma(n) n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1) 1} A_{\sigma(2) 2} \dots A_{\sigma(n) n}$$

Eine explizite Formel für die $\det(A)$. Forderungen 1-3 legen $\det(\underline{\underline{A}})$ also eindeutig fest!

9. Punkt 8 eingesetzt in Punkt 7 : $\det(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{B}}) \det(\underline{\underline{A}})$

Geometrisch: Volumenänderungen verhalten sich multiplikativ under Verknüpfung von LA

10. $1 \overset{1.}{=} \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}}) = \det(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^{-1}) \det(\underline{\underline{A}})$

$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\underline{\underline{A}})}$

Geometrisch: ✓

11. Aus Punkt 10 : Ist $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$ ist $\det(\underline{\underline{A}}^{-1})$ und damit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ nicht definiert, $\underline{\underline{A}}$ ist also nicht invertierbar wenn $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$

12. Wenn $\underline{\underline{A}}$ nicht invertierbar ist, ist $\operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) \neq \{\vec{0}\}$, es existiert ein $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} = 0$ mit $\underline{v} \neq 0$, $\Rightarrow \sum_i \underline{a}_i v_i = 0 \Rightarrow \{\underline{a}_i\}$ sind nicht linear unabhängig $\overset{\text{Punkt 6}}{\Rightarrow} \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

Aus 11 und 12 folgt $\underline{\underline{A}}$ ist invertierbar wenn $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$.

13. Wir schreiben eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ bei der Zeile i und Spalte j entfernt worden sind als $\underline{\underline{A}}_{ij}$.

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\underline{\underline{A}}_{i1})$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Mit dem L.E. lässt sich die Berechnung der Determinante einer $n \times n$ Matrix reduzieren auf die einer $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, usw. bis zu einer 1×1 Matrix. Der L.E. folgt aus der Leibnizschen Regel indem wir alle Permutationen mit $\sigma(1) = i$ zusammenfassen.

14. Wir definieren die <u>Transponierte</u> einer Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ durch

$$(\underline{\underline{A}}^T)_{ij} = \underline{\underline{A}}_{ji}$$

(Vertauschung von Zeilen und Spalten)

(Wie A^T und A als LA zusammenhängen werden wir noch herausfinden)

$$\det(\underline{\underline{A}}^T) \overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A^T_{\sigma(1)1} A^T_{\sigma(2)2} \cdots A^T_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma^{-1}(1)1} A_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots A_{\sigma^{-1}(n)n}$$

└ welches k hat $\sigma(k) = 1$? $A_{k\sigma(k)}$ an Position 1 gesetzt

$k = \sigma^{-1}(1)$ $\tau \equiv \sigma^{-1}$

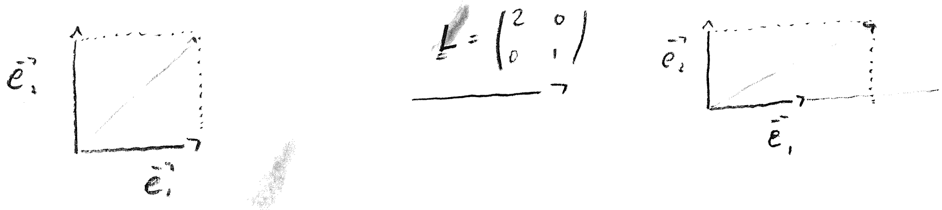
$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, A_{\tau(1)1} A_{\tau(2)2} \cdots A_{\tau(n)n}$$

$$= \det(A)$$

Alle Aussagen über Spalten gelten also genauso für Zeilen!

1.9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren einer linearen Abbildung sind Vektoren, die unter der Transformation ihre Richtung nicht ändern, also nur gestreckt und gestaucht werden.



$\vec{e}_1$ ist ein Eigenvektor, ebenso $\vec{e}_2$, aber nicht $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

Der Faktor um den ein Vektor gestreckt oder gestaucht wird, heisst <u>Eigenwert</u>.

- Einfache Darstellung der LA in einer Basis aus Eigenvektoren: dann streckt die LA jede Komponente um den entsprechenden Eigenwert.
- Normalmoden kann sich als Eigenvektor der LA $\underline{x} \to \underline{F}(x)$ betrachten
- Quantenmechanik

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}, \dots$) und $L: V \to V$ eine lineare Abbildung.
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt <u>Eigenwert</u> von L wenn ein $\vec{v} \neq \vec{0}$ existiert mit

$$L \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$\vec{v}$ heißt <u>Eigenvektor</u> von L zum Eigenwert λ.

$\Rightarrow T - \lambda \mathbb{1}$ ist nicht injektiv, da $(T - \lambda \mathbb{1}) \vec{v} = \vec{0}$ mit $\vec{v} \neq 0$

$\Rightarrow \ker (T - \lambda \mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\}$, $\det (T - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig

Beweis durch Induktion: Stimmen keine der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ überein sind die entsprechenden Eigenwerte $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$.

1. Behauptung ist für $n=1$ richtig da $a_1 \vec{v}_1 \neq 0$ für $a_1 \neq 0$.
2. Sei die Behauptung für n richtig und $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_{n+1}$ Eigenvektoren mit

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots a_n \vec{v}_n + a_{n+1} \vec{v}_{n+1} = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow L (a_1 \vec{v}_1 + \dots) = a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots = 0 \qquad (2)$$

Subtraktion der mit λ_{n+1} multiplizierten Gleichung (1) von (2)

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \vec{v}_1 + a_2 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \vec{v}_2 + \dots a_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \vec{v}_n = 0$$

Da die λ_i alle unterschiedlich sind und die $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ linear unabhängig sind folgt $a_1 = a_2 = \dots a_n = 0$ und aus 2 auch $a_{n+1} = 0$.

Eigenvektoren mit demselben Eigenwert bilden einen Vektorraum: Eigenraum zum Eigenwert λ:

$$L\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1 \qquad L\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad L(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\lambda\vec{v}_1 + \alpha\lambda\vec{v}_2$$
$$= \lambda(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2)$$

Dieser Eigenraum ist der Raum der Eigenvektoren (inkl. der Nullvektor) $\ker(L - \lambda\mathbb{1})$

Berechnung von Eigenvektoren

Gegeben eine Basis suchen wir die Lösung der Gleichung

$$\underline{\underline{L}}\,\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{L}} - \lambda\mathbb{1})\underline{v} = 0 \qquad \underline{v} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \det(\underline{\underline{L}} - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

denn $\underline{\underline{L}} - \lambda\mathbb{1}$ ist nicht invertierbar (da es ausser $\underline{v} = 0$ noch eine weitere Lösung gibt), also ist $\det(\underline{\underline{L}} - \lambda\mathbb{1}) = 0$. Diese Gleichung ist ein Polynom in λ und kann nach λ gelöst werden (charakteristisches Polynom).

Beispiel: $\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad 0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= -(2-\lambda)(1+\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

Eigenvektor zu λ_1: $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = 3\underline{v}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$(2-3)v_1 - 4v_2 = 0$$
$$-1v_1 - (1+3)v_2 = 0$$

zweite Gleichung liefert auch $-1v_1 - (1+3)v_2 = 0$
$v_1 = -4v_2$!

$$\Rightarrow \quad v_1 = -4v_2$$

Zu jedem Eigenwert λ erhält man so eine Richtung (hier $v_1 = -4v_2$), in der Eigenvektoren zu diesem Eigenwert liegen. In diesem Beispiel spannt $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 3$ auf, seine Dimension ist 1. Die Eigenvektoren lassen sich natürlich normieren

$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein normierter Eigenvektor $\underline{\underline{L}}$.

Beispiel: Eigenvektoren gibt es nicht nur im $\mathbb{R}^n$. Sei V der Raum der Funktionen einer Veränderlichen und $L: V \to V$, $f(x) \mapsto \frac{df}{dx}$ die durch Ableitung nach x definierte lineare Abbildung. Eigenvektoren gehorchen

$$\frac{df}{dx} = \lambda f(x)$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Derselbe Eigenwert λ kann als Eigenwert zu unterschiedlichen Eigenvektoren auftreten

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums.

Die algebraische Vielfachheit ist die Ordnung der Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren unterschiedlicher Eigenwerte und die geometrische Vielfachheit deuten an, dass es möglich sein könnte eine Basis aus Eigenvektoren zu konstruieren, eine Basis in der $\underline{\underline{L}}$ dann eine besonders einfache Form hat.

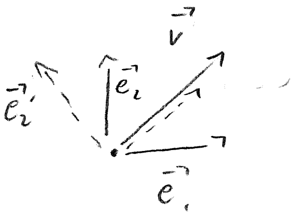
Dazu müssen wir zunächst lernen, wie man von einer Basis in eine neue Basis wechselt.

1.10 Änderung der Basis: Transformation der Komponenten eines Vektors

Die Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ eines Vektorraums V bestimmt die Komponenten eines Vektors

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

Wie ändern sich die Komponenten, wenn wir die Basis ändern? Ein Basiswechsel kann sehr hilfreich sein, wenn wir eine neue Basis finden, die besonders gut an das Problem angepasst ist.



$$\underline{v}_{\text{Basis}\{\vec{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_{\text{Basis}\{\vec{e}_j'\}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zentraler Punkt: Der Vektor $\vec{v}$ ändert sich unter einem Wechsel der Basis nicht

$$\vec{v} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j}_{\text{alte Basis } \{\vec{e}_j\}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i' \vec{e}_i'}_{\text{neue Basis } \{\vec{e}_i'\}}$$

Die Basisvektoren alter Basis lassen sich als Linearkombination der neuen Basisvektoren ausdrücken

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} \vec{e}_i'$$

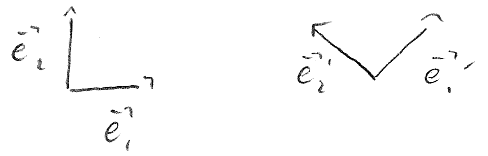
Damit steht der Zusammenhang zwischen Komponenten in der alten und der neuen Basis fest!

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_j S_{ij} \vec{e}_i' = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} v_j \right) \vec{e}_i'$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i' \vec{e}_i'$$

$$\Rightarrow v_i' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} v_j \qquad \underline{v}' = \underline{\underline{S}}\, \underline{v}$$

Beispiel: Wir betrachten eine orthonormale Basis in 2D (alte Basis) und eine neue Basis, die relativ zur ersten um 45° gedreht ist



$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_1{}' - \vec{e}_2{}' \right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}' \right)$$

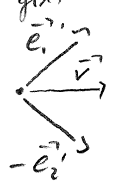
Definition von S_{ij}: $\quad \vec{e}_j = \sum_i S_{ij} \vec{e}_i{}'$ $\quad \rightsquigarrow S_{11} = 1/\sqrt{2}, \quad S_{21} = -1/\sqrt{2}$

$$S_{12} = 1/\sqrt{2} \qquad S_{22} = 1/\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Komponenten eines Vektors nach rechts $\vec{v} = \vec{e}_1$ gilt

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Für die Komponenten eines Vektors diagonal nach oben rechts gilt

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was passiert hier?

$$\begin{tikzcd}
 & V \\
 & \sum_i v_i \vec{e}_i = \vec{v} = \sum_j v_j' \vec{e}_j{}' \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Basis } \{\vec{e}_i\}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Basis } \{\vec{e}_j{}'\}"] & \\
\underset{\mathbb{R}^n}{\underline{v}} \arrow[rr, shift left, "\underline{\underline{S}}"] & & \underset{\mathbb{R}^n}{\underline{v}'} \arrow[ll, shift left, "\underline{\underline{S}}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

1.11 Änderung der Basis: Transformation der Komponenten einer Matrix

Zur Darstellung einer LA $V \xrightarrow{L} W$ hatten wir die Abbildungen von Basisvektoren von V in eine Basis von W dargestellt, und so die Komponenten einer Matrix $\underline{\underline{L}}$ erhalten. Diese ändern sich, wenn sich die Basis von V oder von W ändert.

Spezialfall: $L : V \rightarrow V$

in der alten Basis $\qquad \underline{w} = \underline{\underline{L}}\,\underline{v}$

in der neuen Basis $\qquad \underline{w}' = \underline{\underline{L}}'\underline{v}' \qquad$ (definiert $\underline{\underline{L}}'$!)

Zusammenhang der Vektorkomponenten in alter und neuer Basis

$$\underline{w}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{w} \qquad \Rightarrow \quad \underline{w} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{w}'$$

$$\underline{v}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{v} \qquad \Rightarrow \quad \underline{v} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}'$$

$$\underline{w} = \underline{\underline{L}}\,\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{w}'}_{\underline{w}} = \underline{\underline{L}}\,\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}'}_{\underline{v}}$$

rechts und links mit $\underline{\underline{S}}$ multipliziert

$$\underbrace{\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}}_{\mathbb{1}}\underline{w}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}'$$

$$\underline{w}' = \underbrace{\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}'}\underline{v}'$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L}}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

Allgemein $\qquad \underline{w}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{w} \qquad$ Basiswechsel in W

$\qquad\qquad\quad \underline{v}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{v} \qquad$ Basiswechsel in V

$$\underline{w} = \underline{\underline{L}}\,\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{w}'}_{\underline{w}} = \underline{\underline{L}}\,\underbrace{\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{v}'}_{\underline{v}} \quad \Rightarrow \quad \underline{w}' = \underbrace{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}'}\underline{v}'$$

Basiswechsel werden als <u>passive Transformationen</u> bezeichnet: $\vec{v}$ bleibt unverändert, die Basis und die Komponenten ändern sich, so dass ihre Linearkombination unverändert bleibt.

LA $V \rightarrow W$ ist dagegen eine aktive Transformation, wir lassen meist die Basis unverändert und fragen wie sich die Komponenten unter L ändern.

Dieselbe LA $V \to V$ kann also (in unterschiedlichen Basen) durch unterschiedliche Matrizen dargestellt werden. Die Matrizen

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{L}}$$

heißen <u>ähnlich</u> zueinander (denn sie beschreiben dieselbe LA in unterschiedlichen Basen)

Insbesondere sind Determinante und charakteristische Polynome von ähnlichen Matrizen gleich

$$\det(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}) = \det(\underline{\underline{S}})\det(\underline{\underline{L}})\det(\underline{\underline{S}}^{-1}) = \det(\underline{\underline{L}})$$

Übung f. charakt. Polynom

1.12 Diagonalisierung von Matrizen: die Hauptachsentransformation

In einer Basis aus Eigenvektoren einer LA ist ihre Darstellung eine <u>Diagonalmatrix</u>

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

da $L\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$, $L\vec{e}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2$, ... $\Rightarrow$

$$L\vec{v} = L(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \dots)$$
$$= v_1 L\vec{e}_1 + v_2 L\vec{e}_2 = v_1\lambda_1\vec{e}_1 + v_2\lambda_2\vec{e}_2 + \dots$$

$$\underline{\underline{L}}\cdot\underline{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_2 v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

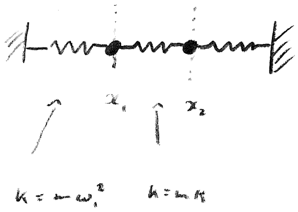
Existiert eine solche Basis, dann ist jede Darstellung $\underline{\underline{L}}$ einer linearen Abbildung L einer Diagonalmatrix $\underline{\underline{L}}'$ ähnlich (da eine Basiswechsel existiert $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{L}}'$)

1. Eine LA L ist genau dann diagonalisierbar (d.h. es existiert eine Basis in der $\underline{\underline{L}}$ diagonal ist) wenn die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen. (s. Fih, § 12, 4.1)

2. Jede Symmetrische Matrix $(\underline{\underline{L}})_{ij} = (\underline{\underline{L}})_{ji}$ ist diagonalisierbar (s. unten)

Die Transformation in eine Basis, in der $\underline{\underline{L}}$ diagonal ist, heißt <u>Hauptachsentransformation</u>.

Beispiel (10)



$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 + K(x_2 - x_1)$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_1^2 x_2 + K(x_1 - x_2)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\omega_1^2 + K) & K \\ K & -(\omega_1^2 + K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$$

$\underline{x}$ ist ein Komponentenvektor im $\mathbb{R}^2$ bestehend aus den Positionen zweier Massen (also kein Ortsvektor eines Massepunktes). Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ sind $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

[$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ hat charakteristisches Polynom $(a-\lambda)^2 - b^2$ mit Nullstellen $a - \lambda = \pm b$, $\lambda = a \pm b$

norm. Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$]

Bilden wir eine neue Basis B aus diesen Eigenvektoren, sind die Komponenten in der neuen Basis

$$\vec{e}_1^{\,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1^{\,A} + \vec{e}_2^{\,A}\right) \qquad \vec{e}_2^{\,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1^{\,A} - \vec{e}_2^{\,A}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_1^{\,A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1^{\,B} + \vec{e}_2^{\,B}\right), \quad \vec{e}_2^{\,A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1^{\,B} - \vec{e}_2^{\,B}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \cancel{(\mathbb{1})^B_A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}}^{-1} = \cancel{(\mathbb{1})^A_B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

└ Komponenten von $\vec{e}_1^{\,A}$ in Basis B

$$\Rightarrow \underline{x}' = \underline{\underline{S}}\, \underline{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\underline{x}}' = \underline{\underline{S}}\, \ddot{\underline{x}} = \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underbrace{\underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{S}}^{-1}}_{\underline{\underline{A}}'} \underline{x}' = \underline{\underline{A}}'\, \underline{x}'$$

$$\underline{\underline{A}}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\omega_1^2 + K) & K \\ K & -(\omega_1^2 + K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & -(\omega_1^2 + 2K) \\ -\omega_1^2 & (\omega_1^2 + 2K) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -(\omega_1^2 + 2K) \end{pmatrix}$$

1.12.1 Vektorräume über $\mathbb{C}$

Einschub: Wir werden Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ im folgenden parallel behandeln.
Wir benötigen vorher noch ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum über $\mathbb{C}$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots \quad \text{mit } v_1, v_2, \dots \in \mathbb{C}$$

Versuch 1: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots$

$\curvearrowright \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_1^2 + v_2^2 + \dots$

$\langle i\vec{v}, i\vec{v} \rangle = - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ $\curvearrowright$ dieses Skalarprodukt führt nicht auf eine nicht-negative Norm

Versuch 2: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + \dots$

$\curvearrowright \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |v_1|^2 + |v_2|^2$

Dieses Skalarprodukt ist <u>nicht</u> linear in beiden Argumenten:

$$\langle \mu \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \mu^* \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

(linear im zweiten Argument, „antilinear" im ersten)
und nicht symmetrisch

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle^*$$

Sind $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ist dieses Skalarprodukt gleich dem euklidischen Skalarprodukt.

1.12.2 Symmetrische und hermitesche Matrizen

In sehr vielen physikalischen Fällen treten sogenannte symmetrische Matrizen auf

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Sind die LA zwischen Vektorräumen über $\mathbb{C}$, sind die Matrixelemente $L_{ij} \in \mathbb{C}$, die entsprechende Symmetrie ist

$$L_{ij} = L_{ji}^* \qquad \text{(hermitesche Matrix)}$$

Wir betrachten symmetrische Matrizen als Spezialfall hermitescher Matrizen (mit verschwindendem Imaginärteil) und diskutieren beide Fälle parallel. Die Matrix $\underline{A}$ im obigen Beispiel ist symmetrisch aufgrund des III Newtonschen Gesetzes.

Lösung $(AB)^+ = \dots$

Definitionen

⌈ orthonormale Basis, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_i v_i^T w_i$

Gegeben ein euklidischer Raum V über $\mathbb{R}$ definieren wir die <u>Transponierte</u> L^T einer LA $L: V \to V$, so dass

$$\langle L\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, L^T \vec{w} \rangle \qquad \forall\ \vec{v}, \vec{w} \in V$$

$$\langle L\vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{j,i} L_{ij} v_j w_i = \sum_{i,j} v_j L_{ij} w_i \underset{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{ij} v_i L_{ji} w_j \equiv \langle \vec{v}, L^T \vec{w} \rangle$$

$$\Rightarrow (L^T)_{ij} = L_{ji}$$

Für eine symmetrische Matrix $L^T = L$

Analog definieren wir für einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_i v_i^* w_i$ die hermitesch Adjungierte Transformation L^+

$$\langle L\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, L^+ \vec{w} \rangle \qquad \text{mit} \quad (L^+)_{ij} = L_{ji}^*$$

Für eine hermitesche Matrix gilt $L^+ = L$. Lösung: $(L^+)^+ = L$, $(L^T)^T = L$

Ein linearer Operator T, der die Norm erhält, wird als <u>Isometrie</u> bezeichnet

$$\|T\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \qquad \forall\ \vec{v}$$

aus $\|\vec{v}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|x\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|y\|^2$
folgt dann auch $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Ist T zusätzlich surjektiv, nennt man T <u>unitär</u> (in endlich-dimensionalen Räumen ist dies immer der Fall, Beweis per Dimensionsformel).

Reelle unitäre Matrizen (bzw. lineare Transformationen in Vektorräumen über $\mathbb{R}$) heißen <u>orthogonal</u>

Für unitäre Transformationen gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, T^+ T \vec{y} \rangle \qquad \forall\, \vec{x}, \vec{y}$$

$$\Rightarrow T^+ T = \mathbb{1} \qquad \Rightarrow T^{-1} = T^+$$

analog für orthogonale Matrizen

$$T^T T = \mathbb{1} \qquad \Rightarrow T^{-1} = T^T$$

Beispiel: Rotationen im $\mathbb{R}^n$ sind orthogonale Transformationen: Sie lassen die Längen von Vektoren und ihre Skalarprodukte unverändert (Längentreue, Winkeltreue)

$$\underline{\underline{R}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_\theta^T \cdot \underline{\underline{R}}_\theta = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{R_{(-\theta)}} \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{R_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungen sind ebenso orthogonale Transformationen.

Geometrische Interpretation: Transponierte

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ist das Skalarprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

nun transformieren wir den ersten Vektor mit L und verändern damit das Skalarprodukt zu

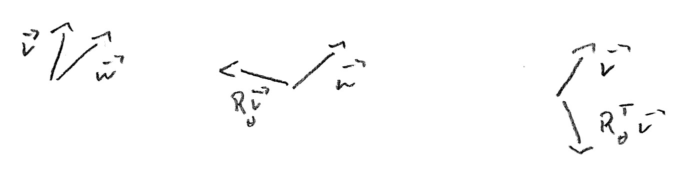
$\langle L\vec{v}, \vec{w} \rangle$

Wie hätten wir den zweiten Vektor transformieren müssen um die gleiche Änderung des Skalarprodukts zu erhalten?

$$\langle \vec{v}, L^+ \vec{w} \rangle = \langle L\vec{v}, \vec{w} \rangle \qquad \forall\, \vec{v}, \vec{w}$$

L definiert L^+

z.B. $L = R_\theta$



$$\underline{\underline{R}}_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}_{(-\theta)}$$

Symmetrische / hermitesche Matrizen haben drei wichtige Eigenschaften

i) ihre Eigenwerte sind reell

ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal

iii) sie sind immer diagonalisierbar

Eigenwerte von symmetrischen / hermiteschen Matrizen sind reell

i) Sei $\vec{v}_i$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ_i und $L^+ = L$

$$\langle \vec{v}_i, L\vec{v}_i \rangle = \langle L^+\vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle \overset{L^+=L}{=} \langle L\vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \langle \lambda\vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle$$

$$= \lambda_i^* \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle$$

$$\langle \vec{v}_i, L\vec{v}_i \rangle = \langle \vec{v}_i, \lambda_i\vec{v}_i \rangle = \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle$$

$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^*$

ii)

$$\langle \vec{v}_i, L\vec{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$$

$$\langle \vec{v}_i, L\vec{v}_j \rangle = \langle L^+\vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \langle L\vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \lambda_i^* \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$$

$\Rightarrow$ wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind Eigenvektoren $\vec{v}_i$ und $\vec{v}_j$ orthogonal

(statt wie für allgemeine Matrizen, nur linear unabhängig)

iii) Wir beginnen mit einem (normierten) Eigenvektor $\vec{e}_1'$ und betrachten den Unterraum orthogonal zu $\vec{e}_1'$, d.h. die Menge aller Vektoren $\vec{v}$ mit $\langle \vec{v}, \vec{e}_1' \rangle = 0$

(das sogenannte <u>orthogonale Komplement</u> zu $\vec{v}$)

Das orthogonale Komplement zu $\vec{e}_1'$ ist geschlossen unter L, d.h. ist $\vec{v}$ im Komplement ist $L\vec{v}$ auch im Komplement

$$\langle \vec{e}_1', L\vec{v} \rangle = \langle L^+\vec{e}_1', \vec{v} \rangle \overset{L^+=L}{=} \langle L\vec{e}_1', \vec{v} \rangle = \lambda_1^* \langle \vec{e}_1', \vec{v} \rangle = 0$$

In einer Basis $\{ \vec{e}_1', \underbrace{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots}_{n-1 \text{ dimensionale Basis des Komplements}} \}$

hat L_{ij} eine "Block-diagonale" Struktur

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{L}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{s. oben!}$$

Die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix $\underline{\underline{B}}$ ist wieder hermitesch (wenn Basis von komplement orthogonal). Im nächsten Schritt bestimmen wir einen ihrer (normierten) Eigenvektoren und bilden das orthogonale Komplement etc., bis eine Basis gefunden ist, in der $\underline{\underline{L}}$ diagonal ist.

Per Konstruktion sind die $\{\vec{e}_i{}'\}$ neue Basis orthonormal

$$\vec{e}_j = \sum_i \vec{e}_i{}' S_{ij} \qquad ? \qquad \langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle = \delta_{kl}$$

$$= \Big\langle \sum_i \vec{e}_i{}' S_{ik}, \sum_j \vec{e}_j{}' S_{jl} \Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j} S_{ik} S_{jl} \underbrace{\langle \vec{e}_i{}', \vec{e}_j{}' \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_i S_{ik} S_{il}$$

$$= \sum_i (S^T)_{ki} S_{il} = (\underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{S}})_{kl}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{S}}$ ist orthogonal (wie erwartet, denn Basiswechsel ist von einer orthonorm. Basis in eine zweite)

Die Matrix $\underline{\underline{S}}$ enthält in den Spalten die Komponenten der alten Basisvektoren (in der neuen Basis). Mit $\vec{e}_i{}' = \sum_j \vec{e}_j \underbrace{(\underline{\underline{S}}^{-1})_{ij}}_{\underline{\underline{S}}^T} = \sum_j \vec{e}_j S_{ji}$ sind Zeilen auch die Komponenten der neuen Basis in der alten Darstellung.

$$\begin{pmatrix} v_1^{(\lambda_1)} & v_1^{(\lambda_2)} & \\ v_2^{(\lambda_1)} & \vdots & \\ v_3^{(\lambda_1)} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(\lambda_1)} & v_2^{(\lambda_1)} & v_3^{(\lambda_1)} & \cdots \\ v_1^{(\lambda_2)} & v_2^{(\lambda_2)} & v_3^{(\lambda_2)} & \cdots \\ & & & \end{pmatrix} = \underline{\underline{L}}$$

$S^{-1} = S^T \qquad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{L}}' \qquad \underline{\underline{S}}$

von rechts: erste Matrix Spalten Übergang mit Eigenvektor, zweite skaliert, dritte Transf. zurück.