

Ein kurzer Überblick über die verschiedenen Teilgebiete der Physik, mit den mathematischen Methoden, die dort jeweils benutzt werden

Mechanik

- Differentialgleichungen (DGL)
- Vektoren

Elektrodynamik

- DGL
- Vektoranalysis
- Gruppen & Symmetrien

Quantenmechanik

- DGL
- Lineare Algebra

Quantenfeldtheorie

- Gruppentheorie
- Feynmantheorie
- Gruppen & Symmetrien

⋮

Relativitätstheorie und Kosmologie

- Vektoren und Tensoren

Thermodynamik

- Differential

Mikrologie

- DGL
- Lineare Algebra

Geologie

- Gruppentheorie
- DGL
- Statistik

Dabei handelt es sich nicht lediglich um Rechnungen, also um Techniken ein konkretes Problem zu lösen, sondern um die Formulierung der grundlegenden Physik in einem passenden mathematischen Formalismus.

Beispiel: $m \frac{d^2}{dt^2} \underline{x}(t) = \underline{F}(\underline{x}, t)$

2^{te} Newtonsche Gesetz; beschreibt die Dynamik eines punktförmigen Teilchens unter der Kraft $\underline{F}(\underline{x}, t)$

Funktion \uparrow

- Differentialgleichung Kraft = Masse \cdot Beschleunigung

- $\underline{F}, \underline{x}$ sind Vektoren im dreidimensionalen Raum

Dass Theorem (hier: Mechanik) mit bestimmten mathematischen Werkzeugen (hier: DGL, Vektoren) effizient) beschrieben werden können ist schon eine wichtige und nichttriviale Aussage über die ^{Theorie} Welt. 0.1

Ohne Kenntnis von DGL, Vektoren lässt sich aber schon die grundlegende Gleichung der Mechanik nicht formulieren oder verstehen - vom Berechnen von Lösungen dieser Gleichung ganz zu schweigen: Allein die Aussage "Kraft lässt sich beschreiben durch einen Vektor in 3D" enthält implizit physikalische Aussagen, die man nur versteht, wenn man sehr genau weiß, was ein "Vektor" ist.

Umgekehrt treten mathematische Konzepte oft in unterschiedlichen und überraschenden Zusammenhängen auf; z.B. ist der Zustand eines Quantensystems durch einen Zustandsvektor (nicht in 3D) beschrieben.

Dabei lohnt es sich

- i) die grundlegenden mathematischen Definitionen gut zu verstehen (+Entwicklung einer "Intuition")
- ii) die daraus resultierenden Rechenmethoden gut zu verstehen und zu beherrschen

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die mathematische Methode, die zur Formulierung der Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik und Thermodynamik nötig sind.

- zum Teil, ohne daß Sie die Physik dazu schon kennen (Entwicklung an Beispielen)
- oft ohne Beweise (mit Hinweis wo sie leicht zu finden sind, oft nicht möglich, bemühen Sie sich trotzdem um Motivation und Anschaulichkeit) und wenn sie in der Mathematikvorlesung kommen)
- meist ohne mathematische Rigorosität

Trotzdem ist ein großer Pausen zu bewältigen, und ich bin auf Ihre Mitarbeit angewiesen

- Nacharbeiten der Vorlesung
- Leihen von Büchern (Vorstellen)
- Übungen
- Fragen: Komilitonen, Forum, Übungsgruppenleiter, Übungsleiter, mich

1. Funktionen und Potenzreihen

Funktionen sind Zuordnungen, die in der Physik zur Beschreibung unterschiedlicher Zusammenhänge genutzt werden, z. B.

Position eines x Punktes Teilchens in einer Dimension zur Zeit t (t sei beliebig)

$$x(t)$$

Elektrisches Potential V am Punkt x

$$V(x)$$

Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge X ein Element y einer Zielmenge Y zu.

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y$$

und wir schreiben in etwas lazierer Notation $y = f(x)$.

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich, wenn

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Diese Definition erlaubt es, nun mit Funktionen zu rechnen (also z. B. Gleichungen für Funktionen zu lösen).

Diese ersten Funktionen, die wir betrachteten, sehen sehr einfach aus:

1.2 Potenzreihen

Wir betrachten eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit festen Koeffizienten $\{a_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($a_k \in \mathbb{R}$)

Für endliches n ist $f(x)$ ein Polynom n -ter Ordnung

z. B. $f(x) = 3 + 7x + 19.5x^2 + \pi x^3$ ($n=3$)

Eine Vielzahl von Funktionen lassen sich als unendliche Potenzreihe darstellen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (1)$$

was sich oft als enorm nützlich erweist.

Zunächst müssen wir allfällig klären, ob und wann die unendliche Summe (1) überhaupt existiert. Wir betrachten zunächst ein gegebenes festes x und schreiben $b_k = a_k x^k$

Eine Folge von (Teil-)Summen B_0, B_1, B_2, \dots

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

heißt Reihe. Existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$ $|B_n - B| < \epsilon$, so nennen wir die Folge und Reihe konvergent mit Grenzwert B und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

$$(kurz \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |B_n - B| < \epsilon)$$

Beispiel: $b_0 = 1, b_1 = 0.1, b_2 = 0.01, \dots$

$B_0 = 1, B_1 = 1.1, B_2 = 1.11, \dots$

Grenzwert 1.1111...

Diese Aussage kann sich auch auf Potenzreihen übertragen, allerdings kann es sein, das die Reihe nur für bestimmte x konvergiert:

z. B. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (hier sind alle a_k gleich eins; die b_k gleich x^k)

$x = 0.1$: $1 + 0.1 + 0.01 + \dots$ konvergiert, s.o

$x = 2$: $1 + 2 + 4 + \dots$ divergiert, kein Grenzwert existiert

(Geometrische Reihe, konvergiert bei $|x| < 1$, divergiert bei $|x| \geq 1$)

1.2.1 Das Konvergenzkriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert für $x = x_1$

$\Rightarrow |a_k x_1^k| \leq C \forall k$ (wobei C eine geeignete Konstante ist, $a_k x_1^k$ kann nicht beliebig wachsen für $k \rightarrow \infty$, wenn die Reihe bei x_1 konvergent ist, für k gross genug muss $|a_k x_1^k|$ sogar beliebig klein werden)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \left(\frac{x}{x_1}\right)^k$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Betrag} \leq C \\ \text{Betrag} < 1 \text{ wenn } |x| < |x_1| \end{array} \right\}$

\Rightarrow jeder Term von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist betragsmässig kleiner als Term

$$\sum_{k=0}^{\infty} C \left| \frac{x}{x_1} \right|^k = C \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{mit } q = \left| \frac{x}{x_1} \right|$$

(konvergente geometrische Reihe für $|x| < |x_1|$)

Beweis: $B_n = \sum_{k=0}^n q^k$
 $(1-q)B_n = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$
 $B_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$

konvergiert eine Reihe also bei $x = x_1$, konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_1|$.
 Geht man über die einzelnen Schritte dieses Arguments mit $x, a_k \in \mathbb{C}$, folgt

Zu jeder (komplexen) Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gibt es ein $s \in [0, \infty]$, mit der Eigenschaft, dass die Reihe für $|x| < s$ konvergiert und für $|x| > s$ divergiert. s ist der Konvergenzradius der Reihe.

Über das Verhalten der Potenzreihe bei $x = s$ macht diese Satz keine Aussage, dort gibt es auch kein allgemein gültiges Verhalten (es gibt Reihen die divergieren an Konvergenzradius konvergieren, divergieren, oder an einzelne Punkte konvergieren an anderen divergieren).

Ausblick (ohne Beweise)

- Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heisst absolut konvergent, wenn auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist jede Reihe absolut konvergent.
- Absolut konvergente Reihen dürfen Glied für Glied multipliziert werden

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

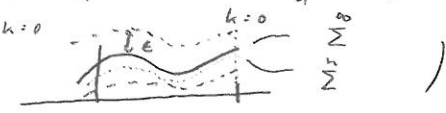
mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$



• eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heisst gleichmäßig konvergent in einem Bereich D wenn

$$\forall x \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right| < \epsilon$$

(gestrichelte Funktion bleibt in einem ϵ -Schlauch)



Innerhalb des Konvergenzradius konvergieren Potenzreihen gleichmäßig.

Gleichförmig konvergente Potenzreihen dürfen gliedweise integriert und differenziert werden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \sum_{k=0}^n a_k x^k = \int dx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k ; \quad \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

1.3 Taylorreihen

Ursprüngliches Ziel bei der Einführung von Potenzreihen war gewesen, allgemeine Funktionen als Potenzreihe darzustellen

$$f(x) = \sum_k a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

inwieweit die Konvergenzradius der Reihe. Zunächst sind die Koeffizienten $\{a_k\}$ zu bestimmen.

$$k=0: f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots$$

$$= a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = f(x) \Big|_{x=0}$$

$$k=1: \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = a_1 + 2a_2 x \Big|_{x=0} + 3a_3 x^2 \Big|_{x=0} + \dots$$

$$= a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

$$k=2: \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x \Big|_{x=0} + \dots$$

$$= 2a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=0}$$

⋮

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

Ist $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und

$x_0 \in (a,b)$ heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

die Taylorreihe bei x_0 ihre Koeffizienten die Taylorkoeffizienten von f bei x_0 .

Bringt man die Potenzreihe nach n Termen ab, heißt

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

1.4

das Restglied der Reihe. $R_n(x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ ist eine veraltete Notation.

" R_n ist von der Ordnung n "

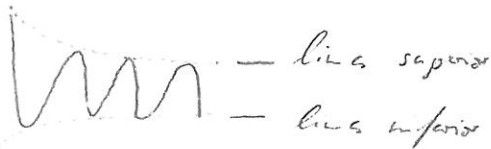
Einschub zu Notation des asymptotischen Verhaltens

$$f(x) \in O(g(x)) \quad (\text{oder genau auch } f(x) = O(g(x)))$$

bedeutet, daß sich $g(x)$ und $f(x)$ asymptotisch nicht "wesentlich" unterscheiden,

konkret
$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

lim sup



Beispiel: $4x^2 + 3x \in O(x^2)$ da $\frac{4x^2 + 3x}{x^2} \rightarrow 4$

$$f(x) \in o(g(x))$$

bedeutet, daß $f(x)$ im Vergleich zu $g(x)$ asymptotisch vernachlässigbar ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Beispiel $4x^2 + 3x = o(x^3)$ da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{x^3} = 0$

Physiker schreiben gerne $4x^2 + 3x = O(x^4)$... , z. B.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\bullet f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

⋮

$$\bullet f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

⋮

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\bullet f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

⋮

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Nimmt man diese drei Beispiele zusammen erhält man ein spezielles Potenzreihenprodukt

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0,2,4,\dots} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{(ix)^k}{k!}$$

Taylor-Reihe
bei 0

Aufspaltung in
k gerade und
ungerade

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x) \quad (\text{Euler Formel})$$

Euler Formel zeigt eine tiefe Beziehung zwischen Trigonometrie und Exponentialfunktionen. Sie ist auch von grosser praktischer Wichtigkeit, da sie erlaubt Oszillationen, wie $\cos(\omega t)$, mit der viel einfacheren Exponentialfunktion darzustellen.

Beispiel: Additionsformel

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

Realkteile beide Seite gibt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

4-komplexe Funktionen

Bei der Betrachtung des Eulers-Tanzen habe wir angemerkt, daß

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, man über die Taylorreihe aber ^{ebenso} Funktionen auch komplexwertig betrachten kann.

Weiteres Beispiel

$$\cos ix = \frac{1}{2}(\cos ix + i \sin ix) + \frac{1}{2}(\cos(-ix) - i \sin(-ix))$$

! Doherrheit erhält
nur gleiche Terme, $\cos ix = \cos(-ix)$

! Doherrheit erhält nur gleiche Terme, $\sin ix = -\sin(-ix)$

$$= \frac{1}{2}(\cos ix + i \sin ix) + \frac{1}{2}(\cos(-ix) + i \sin(-ix)) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} \\ = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \cosh x$$

analog

$$-i \sin ix = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

$\sinh x$, $\cosh x$ werden als "hyperbolischer Sinus" und "hyperbolischer Cosinus" bezeichnet, analog

daß $x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ als hyperbolischer Tangens

Wichtig einfach ist der komplexe Logarithmus, definiert durch die Gleichung

$$e^w = z$$

$\Rightarrow w = \log(z)$ für $w, z \in \mathbb{C}$.

Allerdings zeigt schon

$$e^{2\pi ki} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

$\Rightarrow e^w + 1 = z$ kann als $e^{w + 2\pi ki} = z$ geschrieben werden, d.h.

$$w' = w + 2\pi ki$$

ist ebenso eine Lösung von $e^w = z$ wie w .

\Rightarrow der komplexe Logarithmus ist nicht eindeutig; man erhält durch künstliche Beschränkung eine eindeutige Funktion:

$w = \log(z)$ ist der Hauptwert des Logarithmus wenn $z = e^w$ und $\text{Arg}(w) \in [-\pi, \pi]$.

Nachteil: Sprung bei -1 ("branch cut")

2. Differentialgleichungen (DGL)

Einzelne Mengen können durch einzelne Zahlen beschrieben werden, die zugrundeliegende Prozesse sind jedoch meist durch Funktionen beschrieben

- Bahnkurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ eines Teilchens in 3D

- Potential $V(x, y, z)$ einer Ladungsverteilung

Diese Funktionen gehorchen oft Differentialgleichungen — d.h. Gleichungen in denen Ableitungen auftreten — und deren Lösungen Funktionen sind.
Praktische die gesamte Physik bis ca. 1935 ist Naturbeschreibung mit Differentialgleichungen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t) \quad \text{Newton II}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho(z) \quad \text{eine der Maxwell Gleichungen}$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) \quad \text{Schrödinger Gleichung}$$

Warum immer DGL? Es scheint, dass die Natur "lokal" ist, so dass zur Vorhersage nur lokale Werte einer Funktion nötig sind (Stärke, Beschleunigung, ...)

2.1 Terminologie

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer Funktion ^{auffretend} heißt Differentialgleichung, die höchste Ordnung der Ableitung wird als Ordnung der DGL bezeichnet.

DGL, die Ableitungen nach nur einer Variable enthalten, heißen gewöhnliche DGL (z.B. Newton II), treten Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf spricht man von partiellen DGL. Wir betrachten zunächst gewöhnliche DGL

für Funktionen einer reellen Variable $\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x)$

(y könnte eine Raumvariable sein, x die Zeit, ...)

In diesem Kontext ist eine lineare DGL eine Gleichung der Form

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) y(x) = f(x)$$

denn jede Term ist linear in $y(x)$. Wir schreiben daher auch mit

$$\mathcal{L} \equiv a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)$$

die Gleichung als $\mathcal{L} y = f$. Der Differentialoperator \mathcal{L} ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L} y_1 + \mathcal{L} y_2$$

$f(x)$ bezeichnet man als die Inhomogenität der Gleichung; oft beschreibt $f(x)$ einen externen Einfluß auf ein System, z.B. in $\frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$. \leftarrow Inhomogenität

Ist $f(x) = 0$ (Nullfunktion) spricht man von einer homogenen DGL.

2.2 Linearität von \mathcal{L} und ihre Konsequenzen

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer homogenen DGL, d.h. $\mathcal{L} y_1 = 0$
 $\mathcal{L} y_2 = 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$

so ist $a y_1(x) + b y_2(x)$ auch eine Lösung der DGL (genau wie mit anderen Anfangswerten als y_1 oder y_2):

$$\mathcal{L}(a y_1 + b y_2) = a \mathcal{L} y_1 + b \mathcal{L} y_2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

- Sei $y_1(x)$ Lösung einer inhomogenen DGL, $\mathcal{L} y_1 = f$

$y_2(x)$ Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung $\mathcal{L} y_2 = 0$

denn ist $y_1(x) + a y_2(x)$ eine weitere Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\mathcal{L}(y_1 + a y_2) = \mathcal{L} y_1 + a \mathcal{L} y_2 = f + a \cdot 0 = f$$

2.3 Gewöhnliche DGL erste Ordnung

Sind von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

(O.D.G. kann Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ auf 1 gesetzt werden)

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda y \quad (\text{lineare homogene DGL erste Ordnung})$$

Radioaktive Zerfall: die Zahl der von kleinem Zeitintervall ^{in Δt} zerfallene Atome ist proportional zur Zahl der vorhandenen Kerne $N(t)$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

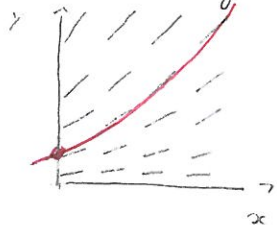
Lösung: $y(x) = A e^{-\lambda x}$

$$\frac{dy}{dx} = A(-\lambda) e^{-\lambda x} = -\lambda y$$

Die Konstante A wird aus Anfangsbedingung (allg. Randbedingung) bestimmt:

$$y(0) = A e^{-\lambda \cdot 0} = A$$

Graphische Darstellung



"kleine Steile" mit Steigung y

- Lösung zu gegebener Anfangsbedingung

\Rightarrow intuitiv: stark am Anfang und folgt den Strichen: DGL und Anfangsbedingung legen die Lösung fest

2.3.1 Eindeutigkeit

Die wichtigste Frage an dieser Stelle ist: wie allgemein ist dieses Verhalten?

Geht die DGL und AB die Lösung fest?

Satz: Sei eine DGL $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ auf einem Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ definiert, so daß ein ^{lokales} $L > 0$ existiert so dass

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}| \quad \forall x, y, \tilde{y} \text{ auf diesem Rechteck}$$

so sind zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die bei einem $x = x_0$

denselben Wert haben, gleich: wenn $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ dann $y_1(x) = y_2(x)$

auf (a, b) . (Lipschitz Bedingung)

Da die Lipschitz Bedingung in der Praxis fast immer erfüllt ist (Matha führt auf ^{DGL mit nichtlineare} ~~eindeutigkeit~~) ist dieser Satz sehr mächtig: Haben wir es geschafft eine Lösung zu geben, so wissen wir, dass keine weiteren Lösungen existieren! (Existenz der Lösung lässt sich etwas unter sehr allgemeinen Bedingungen zeigen)

2.3.2 Lineare DGL erster Ordnung: homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = 0$$

$$J = \frac{d}{dx} + a(x)$$

(gleich dem einfachen Beispiel $\frac{dy}{dx} = -\lambda y$, nur dass λ nun von x abhängt)

Ansatz $y(x) = y(0) \exp \left\{ - \int_0^x dx' a(x') \right\} = y(0) e^{-A(x)}$ (gleich $e^{-\lambda x}$ für $a(x) = \lambda$)

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{y(0)}_{y(x)} \exp \left\{ - \int_0^x dx' a(x') \right\} = \frac{d}{dx} \left(- \int_0^x dx' a(x') \right)$$

$$= -a(x) y(x)$$

"complementary function" $y(x)$

2.3.3 Lineare DGL erster Ordnung: inhomogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x)$$

Wir vermuten eine Lösung, die wieder den Term $e^{-A(x)}$ enthält und versuchen den

Ansatz $y(x) = c(x) e^{-A(x)}$ mit weiter bestimmen $c(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = c'(x) e^{-A(x)} - a(x) c(x) e^{-A(x)} = c'(x) e^{-A(x)} - a(x) y(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + a(x) y(x) = c'(x) e^{-A(x)} \stackrel{!}{=} f(x)$$

DGL

$$\Rightarrow c'(x) = e^{A(x)} f(x)$$

$$c(x) = \int_0^x dx' e^{A(x')} f(x')$$

$$\Rightarrow y(x) = c(x) e^{-A(x)} = \int_0^x dx' e^{-A(x) + A(x')} f(x')$$

$$= \int_0^x dx' G(x, x') f(x')$$

$$G(x, x') = e^{-A(x) + A(x')}$$

Jede Änderung von $f(x')$ mit $0 < x' < x$ ändert also die Lösung von $y(x)$, wobei $G(x, x')$ den "Einfluss" von $f(x')$ auf $y(x)$ angibt. $G(x, x')$ heißt Green-Funktion der DGL und wie werden darauf noch ausführlicher zurückkommen.

Bei der Lösung der inhomogenen Gleichung fällt uns auf, dass bei

$$y(x) = \int_0^x dx' e^{-A(x-x')} f(x')$$

keine Möglichkeit besteht AB zu wählen, $y(0)$ ist null!

Wir können jedoch (f ist linear) zur Lösung der inhomogenen Gleichung

$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$ addieren, und erhalten eine weitere Lösung der DGL mit

anderen Anfangsbedingungen! Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \underbrace{y(0) e^{-Ax}}_{\text{Lösung des homogenen Systems}} + \underbrace{\int_0^x dx' e^{-A(x-x')} f(x')}_{\text{"Partikuläre Lösung"}}$$

Lösung des homogenen Systems

(Eigen von AB kann exponentiell abh.)

"Partikuläre Lösung"

2.3.4 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen für mehrere Variablen y_1, y_2, \dots heißen gekoppelt, wenn y_1, y_2, \dots alle jeweils in den Gleichungen für die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots$ auftreten, also

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, y_2, x)$$

Vektorschreibweise $\frac{dy}{dx} = f(y, x)$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(y_1, y_2, x)$$

Lösungen sind wieder eindeutig wenn eine Lipschitz-Bedingung erfüllt ist. Die Vektorschreibweise suggeriert eine Lösung zu zwei Anfangsbedingungen $y_1(0)$ und $y_2(0)$ indem man in 3D Raum y_1, y_2, x ein "Stückchen" μ mit Steigung f folgt.

Wichtige Anmerkung: DGL höherer Ordnung können als gekoppelte DGL niedriger (erste!) Ordnung geschrieben werden (was die Lösung aber nicht einfacher macht).

Beispiel: $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$

lineare DGL 2^{te} Ordnung

Definiere $v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

und wir erhalten für die obige DGL

$m \frac{dv}{dt} = F(t)$

$\frac{dx}{dt} = v(t)$

} zwei gekoppelte DGL erste Ordnung

Damit haben auch (praktisch) alle DGL n-ter Ordnung eindeutige Lösungen, bis auf n Anfangsbedingungen (Bsp: Ort, Geschwindigkeit für Newton II)

3.4 Gewöhnliche lineare DGL zweite Ordnung

sind von der Form $\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = f(x)$

Wir betrachten zunächst den Fall mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: Eine Masse m an einer Feder mit Stärke k bewegt sich in 1D durch eine viskose Flüssigkeit (Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit) und wird von einer externen Kraft $F_{ext}(t)$ getrieben

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_{ext}(t)$

gedämpfte getriebener harmonischer Oszillator

oder

$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t)$

$b = \gamma/m$

$c = k/m$

$f(t) = F_{ext}(t)/m$

Wir bleiben bei der Notation $x = x(t)$, da DGL zweite Ordnung oft mit der Zeit t als abhängige Variable auftritt, bzw. sich gut mit temporale Effekten illustrieren lassen.

3.4.1 Gedämpfte harmonische Oszillatoren (homogene Gleichung)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c x(t) = 0 \quad b, c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 0$$

oder

$$\mathcal{L} x = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c$$

$$\text{Ansatz: } x(t) = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t}) \quad \text{mit } A, \omega \in \mathbb{C}$$

Satz: Sei $\mathbb{C} \ni x(t) = x_R(t) + i x_I(t)$ eine komplexe Lösung einer linearen DGL

$$\mathcal{L} x = f, \quad \text{dann ist} \quad x_R(t) \in \mathbb{R} \quad \text{eine Lösung von } \mathcal{L} x_R = \operatorname{Re}(f)$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \mathcal{L} x &= \mathcal{L}(x_R + i x_I) = \mathcal{L} x_R + i \mathcal{L} x_I \stackrel{\text{DGL}}{=} f_R + i f_I \\ &\Rightarrow \mathcal{L} x_R = f_R \end{aligned}$$

Wir suchen daher zunächst nach komplexen Lösungen, und nehmen zum Schluss dann Realteil.

In unserem Fall beschreibt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A e^{i\omega t}) &= \operatorname{Re}((A_R + i A_I) e^{i(\omega_R + i\omega_I)t}) \\ &= \operatorname{Re}((A_R + i A_I) e^{i\omega_R t - \omega_I t}) \\ &= \operatorname{Re}(A_R \cos \omega_R t - A_I \sin \omega_R t + i(\dots)) e^{-\omega_I t} \\ &= A \cos(\omega_R t - \phi) e^{-\omega_I t} \end{aligned}$$

eine gedämpfte harmonische Schwingung, jedoch erleichtert die komplexe Exponentialfunktion die Rechnung erheblich:

$$\frac{d}{dt} e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad \Rightarrow \text{Produktregel, trigonometrische Identitäten}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad \Rightarrow \text{Formelwust}$$

Vergleich

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

\Rightarrow einfach und elegant, kommt bei allen linearen DGL zum Ausdruck

Für die homogene Gleichung $I_{xx} = 0$ gibt uns Ansatz $x = A e^{i\omega t}$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + i\omega b + c \end{pmatrix} A e^{i\omega t} = 0 \quad \forall t$$

\Rightarrow entweder $A=0$ (triviale Lösung) oder

$$-\omega^2 + i\omega b + c = 0$$

Quadratische Gleichung in ω mit 2 Lösungen

$$\omega_{\pm} = \frac{-ib \pm \sqrt{-b^2 + 4c}}{-2} = \frac{i}{2} b \pm \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2}$$

Für den Fall $b=0$ (physikalisch: keine Reibung) erhalten wir $\omega_{\pm} = \pm \sqrt{c}$
 $= \pm \sqrt{k_m}$,
 $= \pm \omega_0$,

die allgemeine Lösung für $b=0$ ist also

$$x(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}$$

ihren Realteil kann als

$$x_R(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{harmonische Schwingung})$$

geschrieben werden, A und ϕ sind aus Anfangswert + Anfangsgeschwindigkeit zu bestimmen.

$b \neq 0$ Fallunterscheidung für 3 Fälle

1. $4c - b^2 > 0$

$$\omega_{\pm} = \pm \omega_R + i\omega_I \quad \text{mit } \omega_R = \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2} = \sqrt{c - \frac{1}{4}b^2}, \quad \omega_I = \frac{b}{2}$$

$$x(t) = A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t}$$

mit Realteil

$$A e^{-\omega_I t} \cos(\omega_R t - \phi) \quad (\text{gedämpfte harmonische Schwingung, kleinere Frequenz als } b=0)$$

2. $4c - b^2 = 0$ (sogenannt kritische Dämpfung)

$$\omega_{\pm} = \frac{i}{2} b = \omega_I$$

Wir erwarten noch eine zweite Lösung, genaue Betrachtung von $4c - b^2$

gibt

$$\lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} \frac{e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t}}{i\omega_+ - i\omega_-} = \lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} e^{i\omega_+ t} \frac{1 - e^{i(\omega_- - \omega_+)t}}{i\omega_+ - i\omega_-} = e^{i\omega_+ t} \lim_{\omega_+ \rightarrow \omega_-} \frac{1 - (1 + i(\omega_- - \omega_+)t + \dots)}{i\omega_+ - i\omega_-} = t e^{i\omega_+ t}$$

Somit von Lösung \Rightarrow Lösung

Die allgemeine Lösung für diesen Fall ist also

$$x(t) = A e^{-\omega t} + B t e^{-\omega t} \quad \omega = b/2 \in \mathbb{R}$$

mit 2 freien Parametern (Realteile von A und B).

Physikalisch beschreibt diesen Fall ein exponentielles Abklingen der Bewegung, ohne Oszillation.

3. $4c - b^2 < 0$ (überdämpfte Oszillator)

$$\omega_{\pm} = \frac{i}{2} b \pm \frac{i}{2} \sqrt{|4c - b^2|} = \frac{i}{2} (b \pm \sqrt{b^2 - 4c}) =$$

Allgemeine Lösung

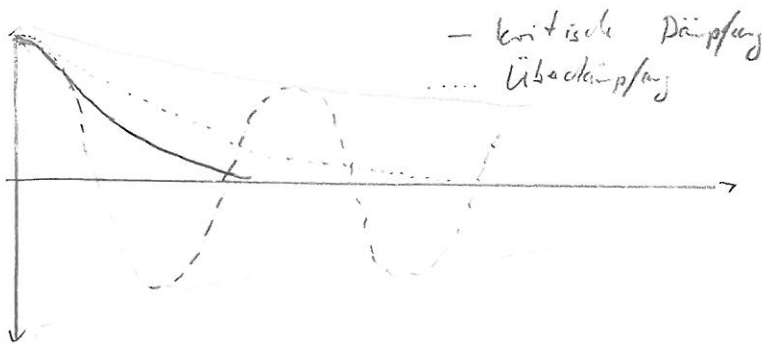
$$y(t) = A_1 e^{i\omega_+ t} + A_2 e^{i\omega_- t} = A_1 e^{-\omega_{+I} t} + A_2 e^{-\omega_{-I} t}$$

Physikalisch ($b > 0$) beschreibt diesen Fall ein exponentielles Abklingen ohne Oszillation, allerdings (bei sonstigen c) langsamer als in Fall 2:

$$\omega_{-I} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < \frac{b}{2} = \omega_{cI}$$

(Imaginärteil von ω_c bei kritischer Dämpfung)

(ω_{+I} klingt schnell ab, bei langer Zeit ist der A_2 -Term dann vernachlässigbar)



— kritische Dämpfung
 Überdämpfung

--- Underdämpfung (Oszillation)
 ("overshooting")

Abfall der Einhüllenden $e^{-\omega_{\pm I} t} = e^{-bt/2} = e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{2}{b}$

Oszillationsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega_R} = \frac{2\pi}{\sqrt{c - \frac{1}{4}b^2}}$

3.4.2 Geleitpfto harmonischer Oszillator (inhomogene Gleichung)

$$\mathcal{L}x = f \quad y = \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c$$

Physikalisch beschreibt $f(t)$ eine externe physikalische Kraft, die das System antreibt, z. B. eine Schallwellen die in regelmäßige Abstände angestossen wird, eine Brücke unter stonastigen Winden oder Schritten eines Fußgänger.

Auch für den harmonischen Oszillator existiert wieder eine Greenfunktion, so daß wir für beliebige $f(t)$

$$x(t) = \int dt' G(t, t') f(t') + x_{\text{homogen}}(t)$$

berechnen können - dies bleibt jedoch einem späteren Kapitel vorbehalten.

Wir erinnern uns an das allgemeine Vorgehen

- spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden (es gibt nur eine!)
- Lösung der homogenen Gleichung mit freien Parametern addieren (Lsg 2)
- freie Parameter aus Anfangsbedingungen bestimmen

Die Lösung der homogenen Gleichung haben wir bereits behandelt.

Zur speziellen Lösung von $\mathcal{L}x = f$ existiert wieder eine Greenfunktion

$$x(t) = \int dt' G(t, t') f(t')$$

so dass wir $x(t)$ für beliebige $f(t)$ berechnen können (wenn wir das Integral ausrechnen können). Dies bleibt jedoch einem späteren Kapitel vorbehalten.

Wir betrachten hier zwei instructive Spezialfälle


1. konstante externe Kraft

$$\frac{d^2}{dt^2} x + b \frac{d}{dt} x + c x = f = \text{const.}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f}{c} \quad \text{ist die spezielle Lösung}$$

Nach Ableiten der Lösung der inhomogenen Gleichung ist ein Gleichgewicht bei f/c erreicht.

2. Sinusförmige externe Kraft

↳ dient auch als Näherung für nicht-sinusförmige periodische Kraft 

• bed. per. Kraft kann als Reihe sinusförmiger Schwingungen mit unterschiedlichen Amplituden geschrieben werden. $Lx = f_1 + f_2 + \dots$ hat Lösung

$$x_1 + x_2 + \dots \quad \text{mit } Lx_1 = f_1$$

$$Lx_2 = f_2$$

⋮

⇒ Fourier-Transformation im nächsten Kapitel

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + c x(t) = A \cos \bar{\omega} t \quad \text{↳ Frequenz der externen Kraft}$$

Wir nutzen wieder $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$ und lösen

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + c x(t) = A e^{i\bar{\omega} t}$$

nach $x(t) \in \mathbb{C}$, nehmen dann der Realteil (L ist linear!).

Ansatz $x(t) = B e^{i\Omega t}$, mit unbestimmtem Ω , gibt

$$\underbrace{(-\Omega^2 + i\Omega b + c)}_{\text{konstant in } t} B e^{i\Omega t} = A e^{i\bar{\omega} t} \quad \forall t$$

|
\

Oszillation mit Kreisfrequenz Ω Oszillation mit Kreisfrequenz $\bar{\omega}$

$$\Rightarrow \Omega = \bar{\omega}$$

$$(-\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b + c) B = A$$

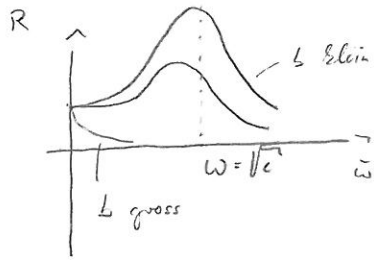
$$B = \frac{A}{c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b} = R e^{-i\phi} A \quad R, \phi \in \mathbb{R}$$

$$R = \left| \frac{1}{c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b} \right| = \frac{1}{|c - \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}b|} = \left((c - \bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 b^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\phi = + \arctan \left(\frac{\bar{\omega}b}{c - \bar{\omega}^2} \right)$$

R und ϕ geben Amplitude und Phase relativ zum externen Kraft an. Der reelle Teil von $x(t) \in \mathbb{C}$ ist

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(B e^{i\bar{\omega}t} \right) = \operatorname{Re} \left(R e^{-i\phi} A e^{i\bar{\omega}t} \right) \\ = R A \operatorname{Re} \left(e^{-i\phi + i\bar{\omega}t} \right) = R A \cos(\bar{\omega}t - \phi)$$



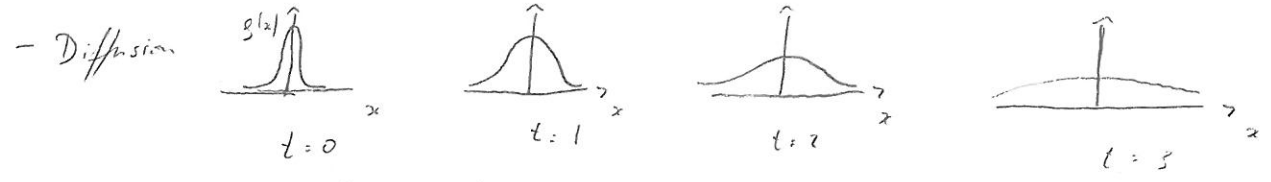
"Resonanzkurve"

Für $L=0$ hat R eine Singularität bei $\bar{\omega} = \sqrt{c} = \sqrt{k/m} = \omega$ (natürliche Oszillationsfrequenz, für kleine L wird R nahe ω sehr gross (Tacoma Bridge))

3.5 Partielle Differentialgleichungen (PDGs)

Differentialgleichungen mit Ableitungen nach unteschrieblichen Variablen werden als partielle Differentialgleichungen bezeichnet (im Gegensatz zu gewöhnlichen DGL, die nur Ableitungen nach einer Variable enthalten). Die Klassifizierung nach Ordnung, linear/nicht-linear ist analog zu gewöhnlichen Gleichungen.

PDGs treten bei der Beschreibung von Feldern auf, die sich in der Zeit verändern, sowie bei Feldern in 2, 3, ... D Raum



Teilchenkonzentration zur Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$ $\frac{\partial}{\partial t} S = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} S$

- Schwingungsgleichung $i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$

- Elektrodynamik $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ $\phi(x, y, z)$ beschreibt das elektrische Potential in einer Region ohne Ladung
 Diese Gleichung beschreibt auch das Gravitationspotential in leerem Raum, die Gleichgewichtverteilung der Temperatur im Raum ohne Wärmeleitungsquelle etc. Sie heißt Laplace-Gleichung

- Wellengleichung $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

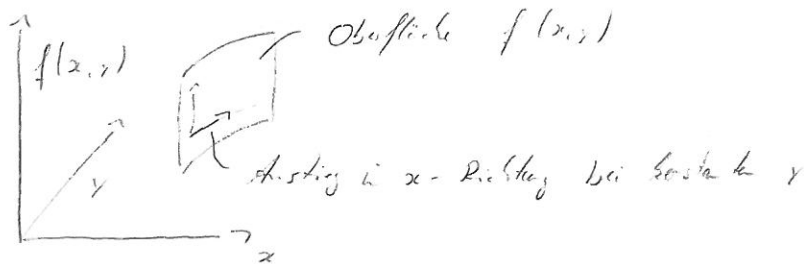
PDG sind i.A. schwerer zu lösen, Theorie und Anwendung von PDG ist ein aktives Forschungsgebiet der angewandten Mathematik. Keine allgemeine Theorie für Existenz und Eindeutigkeit, jede PDG muss einzeln untersucht werden. (Navier-Stokes Gleichung der Hydrodynamik ist eine der "Millennium-Probleme" mit 10⁶ US\$ Preisgeld.)

3.5.1 Partielle Ableitung

bezeichnet die Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen nach einer einzelnen Variable.

Anschaulich

$f(x, y)$



Bei konstanter $y=c$ hängt $f(x, c) = f_c(x)$ nur von x ab, so dass wir die Ableitung wie bei Funktionen einer Variable definieren können

Ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion auf einem (offenen, sog. allgemeinen) Ansatz $C \subset \mathbb{R}^n$, heißt der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

wenn er existiert.

Beispiele : $\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2) = 3x_1^2 + x_2 x_3 + 2x_1 x_2$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \sin(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1, x_2)$$

(nicht differenzierte Variable als konstante denken)

Ableitungen höherer Ordnung

sind durch Hintereinander-Ausführung von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}$ definiert.

Schwarz'sche Regel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

gibt an wie schnell sich die Ableitung in eine Richtung der anderen verändert

Die Schwarz'sche Regel folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial f(x_i + h_i, x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x_i, x_j)}{\partial x_j} \right)$$

$$= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{1}{h_i} \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{1}{h_j} \left(f(x_i + h_i, x_j + h_j) - f(x_i + h_i, x_j) - f(x_i, x_j + h_j) + f(x_i, x_j) \right) \quad 2.14$$

gleichmässige Lösung
 $= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)$
 sind Punkte vertauschbar

3.5.2 Randbedingungen

Bei gewöhnlichen DGL n-tes Ordnung wo die Lösung durch n Anfangsbedingungen festgelegt (oder durch eine Kombination von Anfang-, Mittel-, Endbedingungen). Bei PDE ist die Situation komplizierter, Randbedingungen können eine Lösung $\phi(x, t)$ oder $\phi(x, y, t)$ auf Punkten, Kurven, Flächen des Raumes (x, y, t, \dots) festlegen.

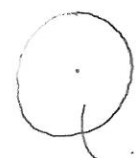
- Wellengleichung in 1D $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$



z.B. mit Randbedingung $\phi(x, t) = \phi(L, t) = 0 \forall t$

- Wellengleichung in 2D $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

zur Beschreibung einer Trommel
 auf Rand $x^2 + y^2 = R$
 ist $\phi = 0$
 innerhalb des Randes
 gilt Wellengleichung



=> Übung

3.5.3 Separationsansatz

Wichtige Lösungsmethode, die viele physikalisch motivierte PDE auf mehrere gewöhnliche DGL zurückführt.

Beispiel Wellengleichung 1D $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

Ansatz $\phi(x, t) = f(x) g(t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x) g(t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f(x) g(t))$$

$$g(t) \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{c^2} f(x) \frac{d^2}{dt^2} g(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x)}_{\text{Funktion von } x} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{1}{g(t)} \frac{d^2}{dt^2} g(t)}_{\text{Funktion von } t}$$

$$\left| \div \phi(x, t) = f(x) g(t) \right.$$

$\forall x, t$

Rechte und linke Seite hängen jeweils nur von x , bzw. t ab, können also unabhängig voneinander verächtelt werden. Damit die Gleichung überall für alle x, t gilt muss

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{g(t)} \frac{d^2}{dt^2} g(t) = \text{Konstante} = -\lambda^2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und somit

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -\lambda^2 f(x)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) = -c^2 \lambda^2 g(t)$$

Wird die Konstante positiv gewählt, erhält man 'unphysikalische' Lsg. \Rightarrow Übung

2 gewöhnliche DGL statt einer PDG!

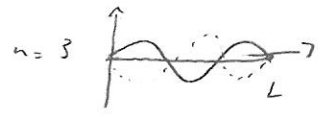
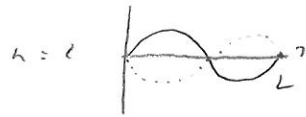
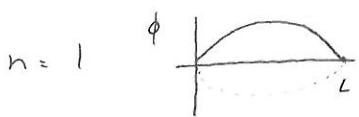
Die DGL lassen sich leicht lösen, $f(x) = A \sin(\lambda x)$ mit $\lambda L = \pi n, n \in \mathbb{N}$ löst DGL und Randbedingungen

$$g(t) = B e^{i \omega t}$$

Die Konstante $-\lambda^2$ bleibt dabei unbestimmt, jedes $\lambda = \frac{\pi n}{L}$ löst DGLs + Randbed.!

Da PDG linear ist, können wir wieder verschiedene Lösungen addieren und erhalten eine neue Lösung, also allgemein

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{i \frac{\pi n}{L} c t}$$

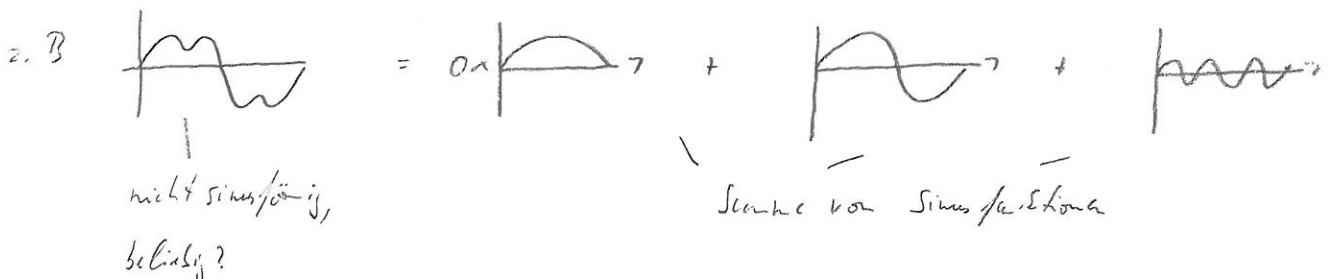


zeigt die ersten drei Töne. Jede dieser Lösungen schwingt mit eigener Frequenz, und ihre Verhalten in x, t ist unabhängig von der Phase weiterer Töne

(sogenannte Normalmode des Systems, obwohl wir noch mehrfach begehen werden)

Ausblick:

Die Werte der $\{C_n\}$ werden nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt



\Rightarrow Fourierreihe, letztes Kapitel

4. Vektorräume und lineare Algebra

Das mathematische Objekt, das "Vektor" genannt wird, wird zur Beschreibung der unterschiedlichsten physikalischen Größen verwendet, z.T. aus der Schule bekannt

- Ortsvektor \underline{x} (von einem gewählten Ursprung aus)
 - Geschwindigkeitsvektor \underline{v} (Verschiebung eines Punktes pro Zeit)
 - elektrisches Feld \underline{E}
- } Größe mit Richtung

zum Teil nicht

- Zustandsvektor ψ beschreibt ein Quantensystem
- Funktionen als Vektoren

Es bestehen tiefe mathematische Zusammenhänge zwischen den (physikalisch) sehr unterschiedlichen Anwendungen, die eine recht abstrakte und zunächst ungewohnte Definition des Vektorbegriffs erforderlich machen. Die "Definition" "Vektoren sind Größen mit Richtung" tangt dazu leider nicht:

- wie ist "Richtung" definiert?
- Kern des Vektorbegriffs ist, dass man Vektoren addieren kann und mit bestimmten Objekten multiplizieren kann und dabei wieder neue Vektoren erhält. Sind diese Operationen für eine physikalische Größe sinnvoll, kann man sie prinzipiell durch Vektoren beschreiben. ("Richtung" ist also nicht Kern der Sache.)

4.1 Definition (Axiome)

Ein Vektorraum über den reellen Zahlen \mathbb{R} ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Verknüpfungen

$$V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$$
$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda v \quad (\lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V)$$

mit folgenden Eigenschaften

$(V, +)$ ist eine Gruppe, d.h. $(v+w)+z = v+(w+z)$, $\exists e = e+v = v \forall v$ (Nulldekt)

$$\forall v \exists -v : v + (-v) = e$$

$v+w = w+v \quad \forall w, v$ (kommutativ)

3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ "

5. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

6. $1v = v$ $\forall v \in V$

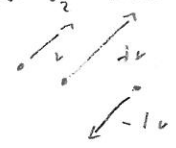
Bemerkungen:

- Die Elemente der Menge V werden als Vektoren v bezeichnet, $v \in V$
- Verkürzend spricht man oft vom Vektorraum V und meint $(V, +, \cdot)$
- statt "über den reellen Zahlen \mathbb{R} " kann man Vektorräume auch "über \mathbb{C} " definieren, dann können Vektoren mit komplexen Zahlen multipliziert werden, oder über noch allgemeineren Objekten (genannt Körper).
- wir schreiben $u-v$ für $u + (-v)$ und v/λ für $(\frac{1}{\lambda})v$, zusätzlich zur Addition (von Vektoren) und Multiplikation (mit Zahlen) sind also auch Subtraktion und Division definiert
- gelten die Axiome auch für eine Untermenge $U \subset V$ mit $u, u_2 \in U$ für $u_1, u_2 \in U$ spricht man von einem Untervektorraum

Verschiebungen im Raum

können addiert werden (Verschiebung v_1 , dann $v_2 =$ erst v_2 dann v_1)

können mit einer reellen Zahl multipliziert werden



} ergibt jeweils eine Verschiebung um $\lambda \cdot v$

n -Tupel reeller Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

können addiert werden $x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

und multipliziert $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

} ergibt jeweils einen neuen n -Tupel

Funktionen $f(x)$

$f(x) + g(x)$

$\lambda f(x)$

} ergibt neue Funktionen

Lösungen einer homogenen linearen DGL $Lx = 0$

$x+y$
 ax

} sind neue Lösungen der DGL \square

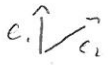
4.2 Basissysteme

Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ nennt man Erzeugendensystem von V , wenn man jeden Vektor v schreiben kann als

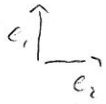
$$v = \underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n}_{\text{Summe linearer Kombination von Vektoren}} \quad v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$$

z.B. Vektorebene in \mathbb{R}^3

(Erzeugendensystem spannt die Ebene auf)



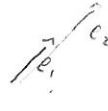
i)



ii)



iii)



iv)

ist kein Erzeugendensystem

Vektoren $e_1, \dots, e_n \in V$ sind linear unabhängig, wenn gilt:

Sei $\underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n}_{\text{wird linear kombiniert}} = 0$, dann folgt $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$

d.h. wenn man keinen der Vektoren als Summe der restlichen schreiben kann

("kein Vektor ist unnützlich", vgl. iii)

Vektoren e_1, e_2, \dots, e_n heißen Basis wenn sie ein Erzeugendensystem und linear unabhängig sind. Sind e_1, \dots, e_n eine Basis, dann kann

Jeder Vektor v auf einzigartige Weise als Summe $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ dargestellt werden

Beweis: i) e_1, \dots, e_n ist ein Erzeugendensystem (d.h. jeder Vektor kann als Summe über v_i geschrieben werden)

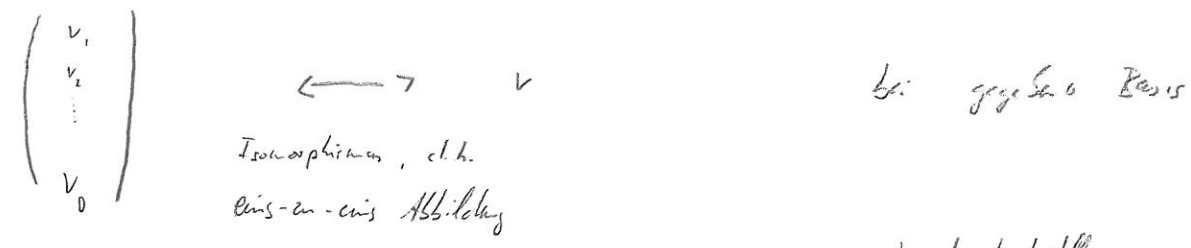
ii) wäre die Darstellung nicht einzigartig, d.h. $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i e_i$ mit $v_i \neq \bar{v}_i$ für mindestens ein i
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}_i) e_i = 0 \Rightarrow \underbrace{(v_i - \bar{v}_i)}_{\text{lineare Unabhängigkeit}} = 0 \quad \forall i \Rightarrow \text{Widerspruch}$

Beispiele i) und ii) sind Basen, iii) und iv) nicht.

Die Zahl der Basisvektoren n heißt Dimension D eines Vektorraums und ist unabhängig von der Wahl der Basis.

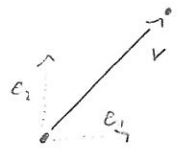
4.3 Darstellung eines Vektors als D-Tupel

Gegeben eine Basis $\{v_i\}$ kann jeder Vektor v durch eine (und nur eine) Linearkombination $\sum_{i=1}^D v_i e_i$ geschrieben werden. Dies legt nahe den D-Tupel v_1, v_2, \dots, v_D als Darstellung des Vektors zu verwenden (als sogenannte Koordinaten des Vektors)



Die $v_1, v_2, v_3, \dots, v_D$ heißen Komponenten / des Vektors ^{in kartesischer Darstellung}, also D-Tupel $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix}$ heißt Spaltenvektor (ist aber nur eine Darstellung des Vektors in einer gegebenen Basis)

Γ Verschiebungsvektor in 2D



$v = 2e_1 + 2e_2$ mit Darstellung $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eine wichtige Frage ist, wie sich \underline{v} ändert, wenn wir zu einer neuen Basis übergehen. Dazu müssen wir uns mit linearen Abbildungen beschäftigen, was wir auch bald tun werden.

Eine ausgezeichnete Basis ist die Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z mit sogenannten kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.4. Affine Räume

Es mag verwunderlich erscheinen, dass ich als Beispiel für Vektoren oft Verschiebungen genannt habe, aber noch nicht über Ortsvektoren gesprochen habe. Tatsächlich sind Vektorräume kein befriedigendes Modell für den 3D physikalischen Raum, wir benötigen folgende Erweiterung

Ein affiner Raum $(M, V, +)$ ist eine Menge von Punkten, ein Vektorraum V und eine Verknüpfung $+$

$$M \times V \rightarrow M \quad (p, v) \mapsto p+v$$

mit den Eigenschaften

i) $p + (u+v) = (p+u) + v \quad u, v \in V \quad p \in M$

ii) zu jedem Paar $p, q \in M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$

Kurz: Die Elemente eines affinen Raums können subtrahiert werden $p - q = v$, ihre Differenz ist ein Vektor (Differenzvektor)

Sie können nicht addiert werden



Koordinatensysteme für affine Räume

Ein Koordinatensystem eines affinen Raums besteht aus einem ausgezeichneten

Punkt p_0 (dem Koordinatenursprung) und einer Basis v_1, \dots, v_d von V .

Jeder Punkt p kann dann als

$$p = p_0 + \sum_i v_i e_i$$

geschrieben werden und wird mit dem Vektor v , bzw. \underline{v} in Koordinatenschreibweise identifiziert. Wichtig: die Identifizierung des physikalischen Raums mit einem

Vektorraum ist also nur bei gegebenem Koordinatenursprung p möglich

4.5 Normierte Räume

Sei V ein V -Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\|$ ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

mit den Eigenschaften

- i) $\|v\| \geq 0$ wenn $v \neq 0$
- ii) $\|a \cdot v\| = |a| \|v\|$ $a \in \mathbb{R}$
- iii) Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Ein V -Vektorraum mit Norm heißt normiert.

Skalarprodukt $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

(die euklidische Norm)

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\text{Denn } \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = (\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y})$$

$$= \underline{x} \cdot \underline{x} + 2 \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{y} \cdot \underline{y}$$

$$= \|\underline{x}\|^2 + 2 \underline{x} \cdot \underline{y} + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2 \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2$$

da $\underline{x} \cdot \underline{y} \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$: zu zeigen

$$= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2$$

somit ist die Dreiecksungleichung erfüllt, i) und ii) kann sich auch leicht zeigen.

Räume mit dieser Norm heißen euklidisch. In einem affinen Raum mit normierten

Differenzvektorraum V ist $\|p-q\|$ der Abstand zwischen zwei Punkten

- in euklidischen Räumen gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$$

Beweis: Sei $y \neq 0$ (sonst ist die Gleichung trivial erfüllt) definieren wir einen zu y orthogonalen Vektor

$$z = \underline{x} - \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y}$$

$$\left(\underline{z} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} - \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} - \underline{x} \cdot \underline{y} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{x} = z + \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} \underline{y}$$



$$\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{z}\|^2 + \frac{(\underline{x} \cdot \underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^4} \|\underline{y}\|^2 \geq \frac{(\underline{x} \cdot \underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2}$$

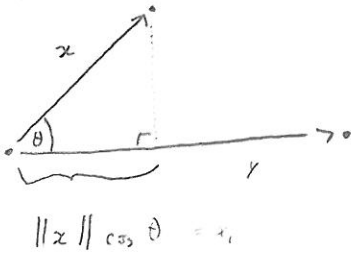
$$\Rightarrow (\underline{x} \cdot \underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2$$

Gleichheit bei $z=0$, z.B.

- durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann man einen ^{nulld} Winkel θ zwischen zwei Vektoren definieren

$$\frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|} \leq 1 \quad \Rightarrow \text{es existiert ein } \theta : \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta$$

Bemerkung: Dieser Weg einen Winkel zu definieren ist natürlich recht absurd, hat aber den Vorteil sehr allgemein zu sein. Dieser Weg ist natürlich konsistent mit der einfachen geometrischen Betrachtung (2D: 2 Vektoren spannen Ebene)



Basis: $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

Das Diagramm zeigt ein 2D-Koordinatensystem mit den Basisvektoren \underline{e}_1 und \underline{e}_2 .

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \underbrace{x_1}_{\|\underline{x}\| \cos \theta} \underbrace{y_1}_{\|\underline{y}\|}$$

- in der Mathematik gebräuchliche Notation

$$\left\langle \begin{array}{c} \underline{x}, \underline{y} \\ \text{Vektor} \end{array} \right\rangle = \underline{x} \cdot \underline{y} \quad \begin{array}{c} \text{Darstellung des Vektors} \end{array}$$

In der Physik wird auch $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_i x_i y_i = (x_1, x_2, x_3, \dots) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \underline{x}^T \underline{y}$ verwendet

4.6 Linearformen und der duale Vektorraum

Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto f(v)$ mit den Eigenschaften

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(av) = a f(v)$$

$$\forall u, v \in V, a \in \mathbb{R}$$

heißt Linearform

Die Menge aller Linearformen f bildet einen Vektorraum mit Addition

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

und Multiplikation

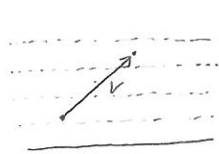
$$(af)(v) = a f(v)$$

Dieser Raum wird als Dualraum zu V bezeichnet.

Diese Definition erscheint zunächst sehr abstrakt. Funktionen, die einem Vektor eine Zahl zuschreiben treten jedoch in der Physik sehr häufig auf.

↑

Gravitationsfeld



Linie konstante Potentials
ein Verschiebungsvektor v

Erdoberfläche



Eine Masse m wird um den Verschiebungsvektor v verschoben.

Die am Masse-Feld verrichtete Energie ist dann

$$E = E(v) = m g v_z$$

Mit $E(u+v) = E(u) + E(v)$ und $E(av) = a E(v)$

erweist sich das (gleichförmige) Gravitationsfeld als Linearform.

Gravitation ist ausserdem linear (experimenteller Befund), d.h.

$$1. \quad (E_1 + E_2)(v) = E_1(v) + E_2(v)$$

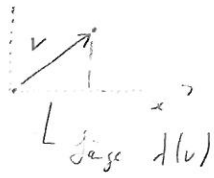
Gravitationsfeld zweier (mit entgeg. Masse \propto unabhängig) gleichförmig)

$$2. \quad (aE)(v) = a E(v)$$

Gravitationsfeld wenn Stärke des Feldes um a erhöht wird

$\Rightarrow E$ ist ein Element des Dualraums V^* (av)

- die Projektion eines Vektors auf eine Raumachse ist eine Linearform



z.B. Projektion auf die x_1 -Achse

Visualisierung: Linearform lässt sich als (polarisierte) Ebene sehen

- in 2D



$l(v)$ ist \pm die Zahl der gekreuzten Ebenen

Das ist aber: eine Linearform lässt sich als homogenes Objekt darstellen, das einen Vektor auffrisst und eine Zahl ausspuckt.

Basis: Die Projektion eines Vektors auf eine Raumachse, legt nahe für Linearform diese Projektionen als Basis für Linearformen zu nutzen

also in 2D

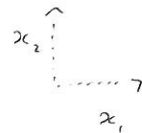


gewählte dx_1

und



dx_2



bzw.

$$dv_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

↳ Basisvektor j

und $d = \lambda_1 dv_1 + \lambda_2 dv_2 + \dots$

Zeilenentwicklung $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

$$dv = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots$$

Ausblick

- in der Quantenmechanik werden Erwartungswerte zu physikalischen Größen X wie Ort oder Impuls als $\langle \psi | X | \psi \rangle$ berechnet, wobei $|\psi\rangle$ ein Zustandsvektor ist, $\langle \psi |$ ein entsprechendes Element des Dualraums.

- in einem euklidischen Raum lässt sich zu jeder Linearform eindeutig ein Vektor definieren (der senkrecht auf dem Kern steht). Das Skalarprodukt von diesem Vektor und v ergibt dann die Abbildung auf \mathbb{R}

Beispiel Gravitationsfeld

$$E = m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Fundamental betrachtet sind Kräfte jedoch Linearformen, auch wenn die Unterscheidung oft als nicht thematisiert wird (in nicht-euklidischen Räumen ist sie wichtig. SR!) 49

4.7 Lineare Abbildungen

Abbildungen sind Funktionen, die Elemente eines Vektorraums auf Elemente eines zweiten Vektorraums abbilden. Wie werden sehen, dass die Darstellung sogenannter linearer Abbildungen in einer gegebenen Basis auf die Matrizenrechnung führt. Dieser Abschnitt bespricht die Grundlagen der Vektorräume

┌ - Abbildung $x: \mathbb{R} \rightarrow V$ (V sei ein Differenzialvektorraum)
 $t \mapsto x(t)$ Bahnkurve eines Teilchens

- Abbildung $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ (Linearfunktion)

Eine Abbildung $L: V \rightarrow W$, $v \mapsto w$ ist linear, wenn gilt

$$L(u+v) = Lu + Lv,$$

wobei $L(v) = Lv$

┌ Multiplikation mit einer Konstanten ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Differentiation ist eine lineare Abbildung vom Raum der differenzierbaren Funktionen auf sich selbst. Der Differentialoperator L aus Kapitel 3 ist eine solche Abbildung.

- In der Quantenmechanik ist sind die Zustandsvektoren $| \psi(t) \rangle$ eines Systems zu unterschiedlichen Zeiten durch eine lineare Abbildung v. a. beschriebt:

$$| \psi(t) \rangle = \underbrace{e^{iHt/\hbar}}_{\text{Unit. All.}} | \psi(0) \rangle$$

Der Kern einer linearen Abbildung sind alle Elemente von V , so dass $Lv = 0$ ist

$$\ker(L) = \{ v \in V \mid Lv = 0 \}$$

┌ Bei einer linearen DGL $Lx = f$ ist der Kern von L der Raum aller Lösungen der homogenen Gleichung $Lx = 0$

Das Bild einer linearen Abbildung $L: V \rightarrow W$ ist definiert durch alle Elemente in W die durch $Lv = w$ generiert werden können

$$\text{Im}(L) = \{ w \in W \mid \exists v \in V: Lv = w \}$$

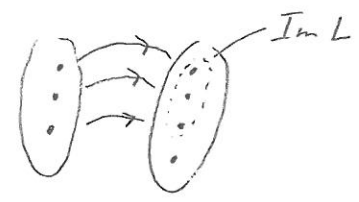


Bild und Kern einer lin. Abb. sind wiederum ein Vektorraum (lineare Kombinationen von Elementen des Bildes/Kerns sind auch Elemente des Bildes/Kerns), die Dimension des Bildes heißt Rang der Abbildung.

4.7.1 Basisdarstellung einer linearen Abbildung $w = Lv$

Stellen wir $v \in V$ und $w \in W$ als Linearkombination von Basisvektoren dar:

$$v = v_1 e_1^v + v_2 e_2^v + \dots + v_n e_n^v \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$w = w_1 e_1^w + w_2 e_2^w + \dots + w_m e_m^w \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

Zunächst fragen wir, wie L auf die n Basisvektoren e_j^v , $j = 1, \dots, n$ wirkt.

$$Lv_j \in W \Rightarrow L e_j^v = \sum_i L_{ij}^D e_i^w$$

man zahlt \vec{v}_j für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ eine Zerlegung von Lv_j in m Basisvektoren von W .

Aufgrund der Linearität von L steht damit schon die Wirkung von L auf einen beliebigen $v \in V$ fest:

$$\begin{aligned} \sum_i w_i e_i^w = w = Lv &= L \left(\sum_j v_j e_j^v \right) = \sum_j v_j L e_j^v \\ &= \sum_j v_j \left(\sum_i L_{ij}^D e_i^w \right) = \sum_i \left(\sum_j L_{ij}^D v_j \right) e_i^w \end{aligned}$$

oder $w_i = \sum_j L_{ij}^D v_j$ oder $\underline{w} = \underline{L}^D \underline{v}$

das proportionale Ausfüllen ergibt

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^D & L_{12}^D & L_{13}^D & \dots \\ L_{21}^D & L_{22}^D & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

mit der Standardregel für Matrizenmultiplikation

So wie ein Spaltenvektor die Darstellung eines Vektors in einer gegebenen Basis ist
(Koordinaten bezügl. einer Basis),
so ist eine Matrix eine Darstellung einer linearen Abbildung in einer Basis.

Konkrete Rechnungen werden (muss) in einer fix (alle) gewählten Basis durchgeführt. Hier einige Beispiele:

Verketten von linearen Abbildungen und Matrixmultiplikation

Wir betrachten zwei hintereinander ausgeführte lineare Abbildungen, und zeigen dass ihre Darstellung in einer Basis die Multiplikation der entsprechenden Matrizen entspricht.

$$V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{K} U$$

$$w_i = \sum_j L_{ij} v_j \quad u_i = \sum_k K_{ki} w_k \quad \text{oder} \quad u = \underline{K} \cdot v \quad \frac{u}{\text{Matrix}} = \underline{K} \cdot v$$

$$\Rightarrow u_i = \sum_k K_{ki} \sum_j L_{kj} v_j \equiv \sum_j M_{ij} v_j$$

$$M_{ij} = \sum_k K_{ki} L_{kj}$$

$$\underline{M} = \underline{K} \cdot \underline{L} \quad \text{mit der gewählten}$$

Definition der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots \\ l_{21} & l_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Äquivalenz von Linear Abb. \Rightarrow Übung

Darstellung von Linearformen

$$\lambda = \sum_i \lambda_i \underbrace{dx_i}$$

\hookrightarrow Basisform $dx_i, e_i = \delta_{ij}$

Darstellung als "Zeilenform" $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$v = \sum_i v_i e_i$$

Darstellung als "Spaltenvektor" $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda(v) = \sum_i \lambda_i dx_i \sum_j v_j e_j = \sum_{ij} \lambda_i v_j \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i v_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt in euklidischen (Hilbert) Räumen

$$\|x\|^2 = \sum_i x_i^2 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Wichtig ist Beziehung zw. Linearform und Vektor, darauf muss es auch genau 4.12 eingehen: sowohl in allen Räumen)

Swap!

- Transponierte L^t eine Abbildung $L: V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{L^t} V^*$

$f \in W^*$
 $f \circ L \in V^*$ die Abb. $V \rightarrow \mathbb{R}$
 $L^t f = f \circ L$ ist Abb. $V \rightarrow \mathbb{R}$

Darstellung $(L^t)_{ij} = L_{ji}$ ("Spiegelung an der Diagonale")

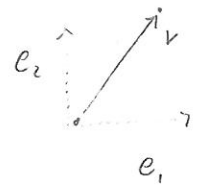
- Inverse L^{-1} eine Abbildung $V \xrightarrow{L} W$ $v = Lw \Rightarrow w = L^{-1}v$ definiert L^{-1} linear
 $W \xrightarrow{L^{-1}} V$ in koordinatendarstellung

$v = Lw \Rightarrow w = (L^{-1})v = (L^{-1})Lw$
 $\Rightarrow (L^{-1})L = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

- Duality

4.7.2 Änderung der Basis

Darstellung der Inverse ist Inverse der Darstellung



$v = \sum_i v_i e_i$

Was ändert sich, wenn wir von einem Basissystem $\{e_i\}$ zu ein anderes $\{e'_i\}$ übergehen?

Wechsel der Basis sind von großer praktischer Relevanz. In einer schon gewählten ("problemangepassten") Basis kann ein Problem völlig trivial werden, die Lösung also in der Suche nach einer geeigneten Basis liegen. z.B. neue Basissystem könnte orthogonaler sein

Induktiv $\langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$

v ändert sich nicht unter der Basiswechsel (!!)

$v = \sum_i v_i e_i = \sum_i v'_i e'_i$

es ändern sich die Komponenten (v_i zu v'_i) und die Basisvektoren (e_i zu e'_i) gemeinsam, so dass $\sum_i v_i e_i = \sum_i v'_i e'_i$ unverändert bleibt.

Allgemein

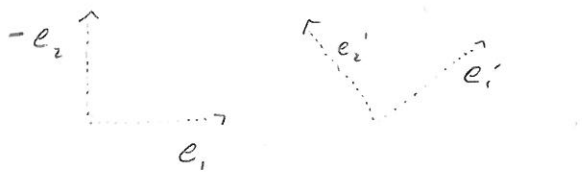
schreibe wie jede der alten Basisvektoren als Linearkombination der neuen Basisvektoren

$e_j = \sum_i S_{ij} e'_i$

einsetzen in

$v = \sum_j v_j e_j = \sum_{j,i} v_j S_{ij} e'_i = \sum_i \left(\sum_j S_{ij} v_j \right) e'_i$
 $= \sum_i v'_i e'_i \Rightarrow v'_i = \sum_j S_{ij} v_j \quad v' = S \cdot v$

Beispiele in 2D



$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1' - e_2')$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1' + e_2')$$

$$\Rightarrow e_j = \sum_i S_{ij} e_j' \quad \text{gilt} \quad S_{11} = S_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{12} = -S_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = S \underline{v}$$

z.B. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \uparrow$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nearrow$

- Drehung in 2D

$$\underline{L}^P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = \underline{L}^P \underline{v}$$

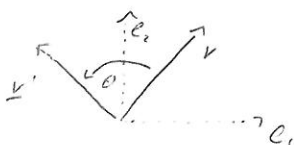
gibt die Änderung der Koordinaten unter einer Drehung des Koordinatensystems. (passive Transformation)

Vergleich

$$\underline{L}^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

gibt die Änderung von \underline{v} an, wenn die Vektoren \underline{v} selbst gedreht werden (aktive Transformation), Basis bleibt unverändert

$$\underline{v}' = \underline{L}^A \underline{v}$$



- Drehung in 3D um z-Achse (passiv)

$$\underline{L}^P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und analog für Drehungen um x und y Achse. Drehungen um eine beliebige Achse lassen sich aus sukzessive Drehungen um x, y, z-Achse zusammensetzen.
(Drehung: multiple Drehungen Kombination nicht.)

- allgemeine lineare Transformation (passiv)

$$\underline{v}' = \underline{L} \cdot \underline{v}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \dots$$

$$\underline{v}'_1 = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}'_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \\ L_{23} \\ \vdots \end{pmatrix} \dots$$

$\Rightarrow \underline{L}$ ist die Matrix der Abbildung der Basis-Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$

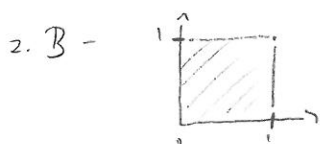
$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{v}'_1 & \underline{v}'_2 & \underline{v}'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

4.8 Die Determinante

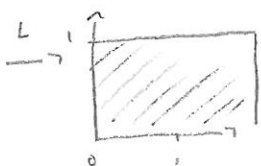
Für die Determinante einer linearen Abbildung, bzw. der Matrix, die die Abbildung darstellt, kann sich verschiedene Definitionen angeben. Daß diese Definitionen äquivalent sind ist eine tiefe Einsicht der linearen Algebra (wird nicht bewiesen, Elemente finden sich leicht in Kosch, v. Waßl)

1. Volumenänderung unter LT

1. Die Determinante einer Matrix \underline{L} ist das vorzeichenbehaftete Volumen der Abbildung des Einheitswürfels (affine Transformation).

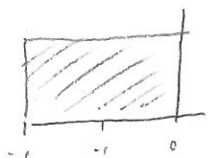


$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det(\underline{L}) = 2$$

- $L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



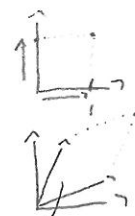
$$\det(\underline{L}) = -2$$

Vorzeichenbehaftet bedeutet, dass wenn sich die Orientierung der Punkte des Einheitswürfels ändert, die Determinante das Vorzeichen ändert. $\det(\underline{L} \cdot \underline{L}_2) = \det(\underline{L}) \det(\underline{L}_2)$ ist eine einfache Konsequenz dieser Definition

- allgemeine lineare Abbildung in 2D $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Bild des Einheitswürfels (in 2D: Quadrat) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$



Fläche des Parallelogramms
 $|a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}|$

2. Lineare Algebra

Lineare Gleichungen lassen sich in Matrixform schreiben

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

als $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ etc.

Wann gibt es eine Lösung?

- Beispiel $n=m=2$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \quad | + a_{22}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \quad | + a_{12}$$

Subtraktion $(a_{11} a_{22} x_1 - a_{12} a_{21}) x_1 = a_{22} b_1 - a_{12} b_2$

$$x_1 = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \text{ analog } x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

\Rightarrow Lösung mit $\underline{b} \neq 0$ existiert nur wenn $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \equiv \det \underline{A} \neq 0$

zu $\underline{b} = 0$ existiert eine Lösung bei der nicht alle $x_i = 0$ sind nur wenn $\det \underline{A} = 0$. ($x_i = 0 \forall i$ liefert triviale Lösung)

Lösbarkeit linearer Gleichungen lässt sich geometrisch interpretieren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Linearkombination von Spaltenvektoren muss \underline{b} ergeben.

$\underline{b} \neq 0$ Spaltenvektoren müssen linear unabhängig sein, wenn eine Lösung zu allgemeinem \underline{b} existieren soll

$\underline{b} = 0$ Spaltenvektoren müssen linear abhängig sein (vgl. Def.)

Die Abbildung vom Raum der Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Determinante wenn gilt

i) "Normierung" $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = 1$

ii) "Multilinearität" $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda c_1 + \mu d_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \lambda c_2 + \mu d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & c_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & d_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & d_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

iii) "alternierend" $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_1 & \dots & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_2 & & a_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & & & & a_{mn} \end{pmatrix} = 0$

d.h. linear abhängige Spaltenvektoren führen zu Determinante null.

i) - iii) sind kompatibel mit intuitiven Vorstellungen von der Volumensänderung; erstaunlich ist, dass sie die Determinante eindeutig festlegen (Beweis: Konv., v. 11/11)

3. Rekursiv: Die Determinante der $n \times n$ Matrix (a) ist a (vorzeichenbehaft. Volumenzu-
weisung)

Schreiben wir eine Matrix \underline{A} mit Zeile i und Spalte j an/aus als \underline{A}_{ij} , dann ist

$$\det(\underline{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki} \det(\underline{A}_{ki})$$

Beispiele - $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad n=2$

$$\begin{aligned} \det(\underline{A}) &= a_{11} \det(\underline{A}_{11}) - a_{12} \det(\underline{A}_{12}) \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \underline{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

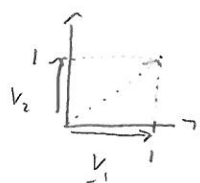
Wichtige Eigenschaften der Determinante (Beweise: 2 T. Übungen)

- $\det(\underline{A}^t) = \det(\underline{A})$
- Vertauschung von Spalten einer Matrix führt zum Vorzeichenwechsel der Determinante
- Inverse einer Matrix existiert nur wenn $\det \underline{A} \neq 0$.
- $\det(\underline{A}\underline{B}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$

4.9 Eigenvektoren und Eigenwerte

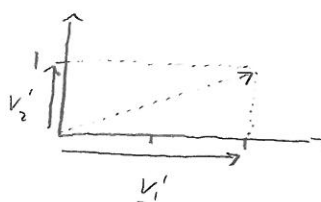
Hinweislich:

Eigenvektoren einer linearen Transformation sind Vektoren, die unter der Transformation ihre Richtung nicht ändern.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→



\underline{v}_1 und \underline{v}_2 sind Eigenvektoren von A , sie ändern ihre Richtung nicht sondern werden nur mit einem skalaren Konstante multipliziert (dem sogenannten Eigenwert)

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ ist kein Eigenvektor.

Eigenvektoren und -werte wachen sich ab einem praktisch bei der Beschreibung von schwingenden Systemen mit vielen Freiheitsgraden ausweisen. Hier treten die Eigenwerte als Resonanzfrequenzen auf.

Eine weitere wichtige Anwendung ist die Quantenmechanik. Eigenvektoren (der Hamiltonmatrix) beschreiben stationäre Zustände eines Systems.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt ein von Null verschiedener Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ist Eigenvektor von A wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

λ heißt der Eigenwert von \underline{v} . Die ~~Eigenvektoren \underline{v} mit einem gegebenen Eigenwert λ bilden eine Basis des Eigenraums zu λ .~~

Hinweise: - Verallgemeinerung auf Vektorräume über anderen Körpern als \mathbb{R} ist einfach zu bewerkstelligen, wichtig ist der Fall $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Prinzipiell sind n unterschiedliche Eigenwerte möglich. Eigenvektoren mit demselben Eigenwert heißen eigenorientiert, Eigenvektoren zum selben Eigenwert spannen einen Unterraum von Eigenvektoren (alle mit Eigenwert λ) auf: Eigenraum.

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, da $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -8-4 \\ +4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ +3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

und spannt einen Eigenraum $\lambda = 3$ auf, $\alpha \in \mathbb{R}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, da $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und spannt einen Eigenraum auf

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

Drehung um 45°

$v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

\Rightarrow keine Eigenvektoren in \mathbb{R} !

4.9 | Bestimmung von Eigenvektoren und -werten

$A v = \lambda v = \lambda I v \Rightarrow (A - \lambda I) v = 0$

I Einheitsmatrix

Wir suchen also eine nichttriviale ($x \neq 0$) Lösung einer homogenen linearen Gleichung. Eine solche Lösung existiert nur, wenn die Spaltenvektoren von $A - \lambda I$ linear abhängig sind $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Diese Gleichung können wir als polynomiale Gleichung ^{n-te Ordnung} für λ auffassen und lösen!

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(2-\lambda)(1+\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$

mit Lösungen $\lambda = -2, 3$

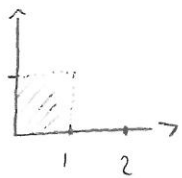
\Rightarrow Eigenvektor lässt sich jetzt aus dem (reduzierten) Gl.

$(2-3)v_1 - 4v_2 = 0$
 $-1 v_1 - (1+3)v_2 = 0$ Subtraktion:

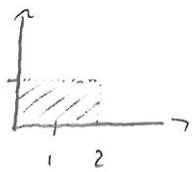
$v_1 = -4v_2$
 und analog für $\lambda = -2$.

4.10 Die Hauptachsen transformation

ist sicher die wichtigste Anwendung des Eigenvektor-Konzepts.



\xrightarrow{A}



hat in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
eine besonders einfache ("ausgereinigte")

Darstellung $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ "diagonal"

Die Darstellung A ist diagonal, wenn $A_{ij} = 0$ mit $i \neq j$. Auf der Diagonale liegen die Eigenwerte; die Basisvektoren sind Eigenvektoren.

Bei einer anderen Wahl der Basis wäre A nicht diagonal, die Eigenvektoren müsste man erst berechnen.

Kernfrage: Gegeben A (ggf. in einer gegebenen Basis \underline{A}), kann man eine (zweite) Basis finden, so dass A' diagonal ist? Dies ist genau dann der Fall, wenn die Eigenvektoren von A eine Basis bilden.

- Anwendungen:
- Schwingungsmode (Eigenmode) gekoppelter Systeme
 - Beschreibung rotierender Körper
 - QM: Diagonalisierung der Hamilton-Matrix
 - QFT: Diagonalisierung der Lagrange-Funktion liefert Elementarteilchen-Zustände

Obwohl sich diese Frage allgemein beantwortet lässt, beschäftigen wir uns hier auf einen Spezialfall von grosser Relevanz

4.10.1 Selbstadjungierte Abbildungen und symmetrische Matrizen

Matrizen die in der Physik auf treten sind häufig "symmetrisch" $A_{ij} = A_{ji}$

Spannweite Symmetrie z.B. durch Matr. III $E_k = \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2$ Fedestärke
•••••
| | \rightarrow
 x_1 x_2 x

$$= \frac{k}{2} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation einer symmetrischen Abbildung?

Exkurs: Selbstadjungierte Abbildungen

Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow V$ in einem endlichdimensionalen Vektorraum heißt selbstadjungiert, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$$

wobei $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ das Euklidische Skalarprodukt ist.

Satz: Sei (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis und $L: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, dann ist L genau dann selbstadjungiert, wenn die zugehörige Matrix $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle$ symmetrisch ist.

$$L e_j = \sum_i L_{ij} e_i$$

Beweis: 1. $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle$

↳ Selbstadj.
 $= \langle e_j, Ae_i \rangle = A_{ji}$

2. $\langle Ay, x \rangle = y^t \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = y^t \cdot \underline{A}^t \cdot \underline{x} = \langle y, Ax \rangle$

$$(\underline{A}^t)^t = \underline{A}^t \cdot \underline{A}^t$$

\Rightarrow ist eine Matrix in einer Orthonormalbasis symmetrisch, ist sie auch in allen anderen Orthonormalbasen symmetrisch

Satz: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer selbstadjungierten linearen Abbildung A sind orthogonal zueinander.

Damit kann man Eigenvektoren zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwenden, in dem die Matrixdarstellung einer Abbildung diagonal ist. Bei degenerierten Eigenwerten lassen sich orthogonale Vektoren im entsprechenden Eigenraum konstruieren.

Beweis: Seien u und v Eigenvektoren von A unterschiedliche Eigenwerte $\lambda \neq \mu$

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

selbstadj. $\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

Die Transformation von einer gegebenen Basis $\{e_i\}$ in eine Basis $\{e'_i\}$ der A diagonal ist, heißt Hauptachsentransformation. Wir betrachten die Fall, bei dem $\{e'_i\}$ und $\{e_i\}$ orthogonal sind:

Schreibe wir einen beliebigen Vektor $v = \sum_j v_j e_j$ im "alten" Koordinatensystem, ist v'_i im neuen

$$v'_i = \langle e'_i, \sum_j v_j e_j \rangle = \sum_j \langle e'_i, e_j \rangle v_j = \sum_j S_{ij} v_j = \dots$$

$S_{ij} = \langle e'_i, e_j \rangle = \langle e_j, e'_i \rangle$ und $e_j = \sum_i S_{ij} e'_i$
komponente j des i -ten Eigenvektors im alten System

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1 (normiert)} \\ \vdots \\ \text{Eigenvektor } n \end{pmatrix} \quad \text{in alter Basis}$$

$$\underline{v}' = \underline{S} \cdot \underline{v}$$

Genauso kann man die Transformationsgesetze der Darstellung von A unter der Hauptachsentransformation betrachten

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle e_i, A e_j \rangle = \dots \text{ aus } A e_j = \sum_i \lambda_i e_i \\ &= \left\langle \sum_k S_{ki} e'_k, A \left(\sum_e S_{ej} e'_e \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k,e} S_{ki} \cdot \langle e'_k, A e'_e \rangle S_{ej} = \sum_{k,e} S_{ki} A'_{ke} S_{ej} = \left(\underline{S}^T \cdot \underline{A}' \cdot \underline{S} \right)_{ij} \end{aligned}$$

da $(\underline{S}^T)_{ik} = S_{ki}$

$$\underline{A} = \underline{S}^T \cdot \underline{A}' \cdot \underline{S}$$

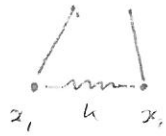
Da \underline{S} zeilenweise aus normierten, orthogonalen Eigenvektoren besteht, gilt

$$\underline{S} \cdot \underline{S}^T = \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1} \dots \\ \text{Eigenvektor } n \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Eigenvektor 1} \\ \text{Eigenvektor } n \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{S}^T = \underline{S}^{-1} \quad \text{und} \quad \underline{A}' = (\underline{S}^T)^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^{-1} = \underline{S} \cdot \underline{A} \cdot \underline{S}^T$$

Matrizen mit $\underline{S}^T = \underline{S}^{-1}$ heißen orthogonal. Die entsprechende lineare Transformation $\underline{v}' = \underline{S} \underline{v}$ erhält das Euklidische Skalarprodukt: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v}' = (\underline{S} \underline{u})^T (\underline{S} \underline{v}) = \underline{u}^T \underbrace{\underline{S}^T \underline{S}}_{\mathbb{1}} \underline{v} = \underline{u}^T \underline{v}$
 (\Leftrightarrow Rotation + Spiegelung)

Beispiel: Ge koppelte Pendel



$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 + k x_2 \quad k = k/m$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + k x_1$$

$$\text{oder } \ddot{\underline{x}} = - \begin{pmatrix} \omega^2 & -k \\ -k & \omega^2 \end{pmatrix} \underline{x} = -\underline{A} \underline{x}$$

Die Matrix \underline{A} hat zwei Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\omega^2 (x_1 + x_2) + k (x_1 + x_2)) = -(\omega^2 - k) x_1'$$

$$\ddot{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(\omega^2 + k) x_2'$$

$$\ddot{\underline{x}}' = \begin{pmatrix} -(\omega^2 - k) & 0 \\ 0 & -(\omega^2 + k) \end{pmatrix} \underline{x}'$$

In den neuen Koordinaten ('Normalkoordinaten') liegen zwei unabhängige Differentialgleichungen vor! Die entsprechenden Bewegungsmuster (phasensynchron $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, phasenverschoben $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$) heißen Normalmoden des Systems.

4.11 Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ im \mathbb{R}^3 ist in kartesischen Koordinaten definiert als der Spaltenvektor

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

und kann als Determinante $\begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$ geschrieben werden

Geometrische Interpretation

1. $\underline{v} \times \underline{w}$ ist ein Vektor der senkrecht auf \underline{v} und \underline{w} steht:

$$\underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = v_1 v_2 w_3 - v_1 v_3 w_2 + v_2 v_3 w_1 - v_2 v_1 w_3 + v_3 v_1 w_2 - v_3 v_2 w_1 = 0$$

und analog $\underline{w} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$

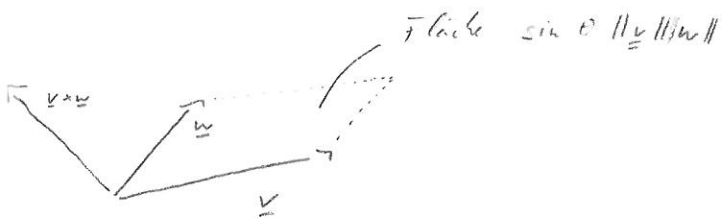
2. Die Norm von $\underline{v} \times \underline{w}$ ist $\sin \theta \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$ wobei θ der Winkel zwischen \underline{v} und \underline{w} ist

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \|\underline{v} \times \underline{w}\|^2 + (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 &= v_2^2 w_3^2 - 2v_2 w_3 v_3 w_2 + v_3^2 w_2^2 \\ &\quad + v_3^2 w_1^2 - 2v_3 w_1 v_1 w_3 + v_1^2 w_3^2 \\ &\quad + v_1^2 w_2^2 - 2v_1 w_2 v_2 w_1 + v_2^2 w_1^2 \\ &\quad + (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= v_1^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_1^2 w_3^2 \\ &\quad + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_2^2 w_3^2 \\ &\quad + v_3^2 w_1^2 + v_3^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \end{aligned}$$

$-\ v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 + 2(v_1 w_1 v_2 w_2 + v_1 w_1 v_3 w_3 + v_2 w_2 v_3 w_3)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\underline{v} \times \underline{w}\|^2 &= \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - \cos^2 \theta \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \\ &= (1 - \cos^2 \theta) \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \\ &= \sin^2 \theta \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \end{aligned}$$



$\|\underline{v \times w}\|$ steht senkrecht auf dem von $\underline{v}, \underline{w}$ aufgespannten Parallelogramm und seine Norm ist gleich dem Flächeninhalt.

Zusatz: - nach der obigen Definition gehört $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v \times w}$ die "Rechte-Hand-Regel" (Konvention über die Richtung von $\underline{v \times w}$!)

- $\underline{u} \cdot (\underline{v \times w})$ ist das Volumen des durch $\underline{u}, (\underline{v \times w})$ aufgespannten Parallelpipeds

Ausblick:

- Wie haben ausschliesslich reelle Vektorräume betrachtet. In der Quantenmechanik
wollen Sie Vektorräume über die komplexen Zahlen kennen lernen, also
 $(t, v) \mapsto t v$ mit $t \in \mathbb{C}$

Auch damit lässt sich ein Skalarprodukt zur euklidischen Norm definieren

$$v = \sum_i v_i e_i \quad \langle v, v \rangle = \sum_i v_i^* v_i$$

Durch die komplexe Konjugation hat nun der Nullvektor die Norm Null
(Axiom i) aus 4.5). Bei $\langle v, v \rangle = \sum_i v_i^2$ hätte auch $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ Norm Null.

Selbstadjungierte Abbildung, Hauptachsentransformation etc. laufen analog.

- Physiker klassifizieren gerne Objekte nach ihrem Verhalten unter einer Transformation
in eine neue Basis

$$t' = t \quad \text{transformiert wie Skalar}$$

$$\underline{x}' = \underline{S} \underline{x}$$

komponente eines Vektors: "transformiert wie ein Vektor"

$$\underline{A}' = \underline{S} \underline{A} \underline{S}^T$$

Elemente eines Tensors