

5. Vektoranalysis

Analysis beschäftigt sich u.a. mit Funktionen und deren Verhalten "nahe" gegebenen Punkte. z.B. ist $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |v| < \delta \quad \left| \left[f(x+v) - f(x) \right] - f'(x)v \right| < \epsilon |v|$$

$$\text{oder } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - f'(x)v}{|v|} = 0$$

Konkret diese Art Arbeit wackelt also nicht nur für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ("eine Zahl $f(x)$ die von Ort x abhängt") sondern auch für komplexere Abbildungen (z.B. "ein Vektor, der von Ort abhängt") benötigt \Rightarrow Vektoranalysis: Differenzial und Integrale von Formen und Vektoren auf Linien, Oberflächen, Volumina, ...

- Aerodynamik: Geschwindigkeitsfelder
- Elektrodynamik: Maxwellgleichungen sind DGL von Vektorfeldern
- Allgemeine Relativitätstheorie: DGL mit raum-zeitliche Ableitungen
- Thermodynamik: Integrale von Formen in Räumen wie z.B.

↑
Tangenten


↓

5.1 Vektorfelder und 1-Formen

Sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum, dann ist ein Vektorfeld v auf M eine Abbildung

$$v: M \rightarrow V, \quad p \mapsto v(p)$$

die jedem Punkt in M einen Vektor v zuweist

Visualisierung 

Analogy dazu ist eine 1-Form eine ortabhängige Linearform:

Sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum, dann ist eine 1-Form λ auf M eine Abbildung,

$$\lambda: M \rightarrow V^*, \quad p \mapsto \lambda_p$$

die jedem Punkt p eine Linearform λ zuweist.



5.2 Differential

Das Differential einer Abbildung von einem affinen Raum auf einen zweiten, ist eine Verallgemeinerung der Ableitung.

Ableitung von $y = f(x)$ gibt an wie stark sich y bei "kleiner Änderung" von x ändert

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad (\text{linear!})$$

Differential von $f: X \rightarrow Y$ gibt an wie stark sich y bei "kleiner Änderung" von x ändert

$$\Delta y = (D_p f) \Delta x + o(\|\Delta x\|) \quad \text{wobei } X \text{ und } Y \text{ affine Räume sind, } \Delta y, \Delta x \text{ sind Differenzvektoren (mit Norm!)}$$

Seien X, Y zwei affine Räume mit normierten Differenzvektorräumen V, W .

Die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt in Punkt p differenzierbar, wenn eine lineare

Abbildung $L \equiv D_p f$ existiert, so dass gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(p+v) - f(p) - Lv\| < \epsilon \|v\|$$

für alle v aus dem Differenzvektorraum von X mit $\|v\| < \delta$.

$$\text{oder kurz } \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - Lv\|}{\|v\|} = 0$$

Anschaulich: Geht man von p aus einen kleinen Schritt $h v$ in Richtung v ($h \ll 1$) dann ist $h(D_p f)v + o(h)$ die

Änderung in f . $D_p f$ kann man sich als "lineares Objekt" vorstellen, das einen Vektor $v \in V$ frisst und einen Vektor $w \in W$ ausspuckt. (Genau so wie $f'(x) \Delta x$ frisst und Δy ausspuckt mit $\Delta y = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$)

Beispiel: f sei eine Abbildung zwischen zwei 2D affinen Räumen



$$f(p) = p_Y + g_1(p) e_1^y + g_2(p) e_2^y$$

$$g_i(p) = g_i(x_1, x_2)$$

$$D_p e_1^x = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} e_1^y + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} e_2^y$$

$$\text{mit } p = p_x + x_1 e_1^x + x_2 e_2^x$$

$$D_p e_2^x = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} e_1^y + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} e_2^y$$

$$\Rightarrow \text{Matrixdarstellung } D_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{"Jacobian-Matrix"}$$

5.3 Das Wegintegral

Wir betrachten Linien Γ in einem affinen Raum. Zunächst soll ein

Integral einer 1-Form entlang einer Linie definiert werden. Diese Definition werden wir dann auch nutzen, um verschiedene Integrale von Vektorfeldern entlang einer Linie zu definieren.

Arbeit ist das Wegintegral der Kraft entlang eines Weges

Eine 1-Form λ definiert an jedem Punkt eine Abbildung von Vektoren auf die reellen Zahlen. Unterteilen wir eine Linie in eine Vielzahl von Differenzvektoren



ist $\lambda_{P_i} (P_{i+1} - P_i)$ ein Zell
 $\lambda_{P_i} (P_i - P_{i-1})$ "
 (Mathematischste Art und Weise um 1-Form und Wegstück kombinieren um auf eine Zahl zu kommen)

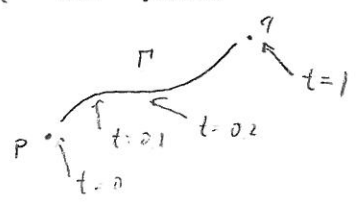
Heuristische Definition des Wegintegrals einer 1-Form:

$$\int_{\Gamma} \lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{P_i} (P_{i+1} - P_i)$$

Vergleich mit dem Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ (heuristisch)

$$\int dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Zur präzisen Definition des Wegintegrals benötigt man allerdings noch eine Parametrisierung der Linie γ : Eine Abbildung von den reellen Zahlen auf die Elemente der Kurve



Eine Parametrisierung γ einer Kurve (als Punktmenge) ist eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma: [0,1] \rightarrow X$$

mit $\gamma([0,1]) = \Gamma$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ und $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} \neq 0$ (Nullvektor) $\forall t \in [0,1]$

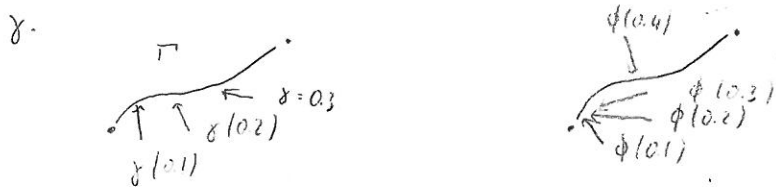
Gegeben eine Parametrisierung γ der Kurve Γ ist das Wegintegral $\int_{\Gamma} 1$ eine 1-Form 1 entlang Γ gegeben durch

$$\int_{\Gamma} 1 = \int_0^1 dt \cdot 1 \cdot \frac{d\gamma}{dt}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Zahl, Funktion von } t}$
Linearfunktion $1 \cdot \gamma(t)$
Vektor im Differenzial
 Integral über t

Diese Definition hängt natürlich nicht von der Wahl der Diskretisierung abhängig (sonst wäre sie schlecht). Tatsächlich ist das Wegintegral unabhängig von der Parametrisierung:

Wir betrachten eine zweite Parametrisierung $\phi(s)$ mit $\phi([0,1]) = \Gamma$, bei der Γ an einer Stelle schneller oder langsamer durchlaufen wird als in der Parametrisierung γ .



Dann existiert eine diff. Funktion $t = f(s)$, die jedem s ein t zuordnet mit

$$\phi(s) = \gamma(f(s))$$

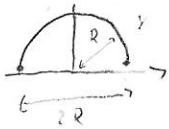
(Übersetzung von einer Parametrisierung ϕ in eine andere γ .)

In beiden Parametrisierungen erhalten wir dasselbe Integral:

$$\int_0^1 ds \cdot 1_{\phi(s)} \frac{d\phi}{ds} = \int_0^1 ds \cdot 1_{\gamma(f(s))} \frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=f(s)} \frac{df(s)}{ds} = \int_0^1 dt \cdot 1_{\gamma(t)} \frac{d\gamma}{dt}$$

\uparrow Kettenregel $\frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds} \gamma(f(s)) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \frac{df(s)}{ds}$
 \uparrow Substitutionsregel

Beisp. d: Ein Halbkreis in 2D



$$\gamma(t) = p + R \cos(2\pi t) e_1 + R \sin(2\pi t) e_2$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\pi R \sin 2\pi t \\ 2\pi R \cos 2\pi t \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ gilt} \\ \text{Halbkreis} \end{array}$$

Zu berechnen sei das Integral der 1-Form $\lambda_p = dx$: |||||

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} dt \lambda_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dt \quad dx \quad (-2\pi R \sin 2\pi t e_x + 2\pi R \cos 2\pi t e_y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dt \quad (1 \ 0) \begin{pmatrix} -2\pi R \sin 2\pi t \\ 2\pi R \cos 2\pi t \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ob } e_x = 1 \\ \text{, } \text{ob } e_y = 0 \end{array}$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} dt \quad 2\pi R \sin 2\pi t = + R \left[\cos 2\pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} = +R (-1 - 1) = -2R$$

5.3.1 Exakte 1-Formen

Wir betrachten eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ von einem affinen Raum $(X, V, +)$ auf die reellen Zahlen.

Eine 1-Form λ_p heißt exakt, wenn sie das Differenzial einer Funktion

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\lambda_p = D_p f$$

und wird auch als $\lambda_p = df$ geschrieben. In Komponenten: $\lambda_p \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right)$

Das Integral exakter 1-Formen hängt nicht vom Weg ab, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges

$$\int_{\gamma} Df = \int_0^1 dt (Df)_{\gamma(t)} \frac{d\gamma(t)}{dt} = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \left[f(\gamma(t)) \right]_0^1 = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Kette regel $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = (Df)_{\gamma(t)} \frac{d\gamma}{dt}$

Insbesondere ist $\int_{\gamma} df = 0$ (Integral über eine geschlossene Kurve)

Auch der Umkehrschluss gilt: Ist $\oint \omega = 0$ auf allen geschlossenen Pfaden null, existiert eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$.

$$f(p) = \int_{p_0, \Gamma}^p \omega$$

(Pfad Γ)

Γ beginnt bei beliebigem Punkt, endet bei x : Weg egal da ω exakt!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{p+h e_i}^p \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 dt \omega_{p+th e_i} (h e_i)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 dt \omega_p + th e_i e_i = \omega_p e_i$$

da für alle weiteren Komponenten

$$\Rightarrow \omega = df$$

5.3.2 Wegintegrale von Vektorfeldern

Mithilfe des Wegintegrals für 1-Formen ist es möglich auch Integralen von Vektorfeldern einen Sinn zu geben. Dazu muss aus einem Vektor ein Element des Dualraums konstruiert werden:

$$\lambda_{p_0} (p_1 - p_0) \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

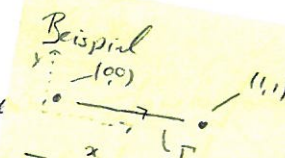
$$"v" (p_1 - p_0) \in \mathbb{R} \quad ?$$

Kernidee: In einem euklidischen Raum definiert das Skalarprodukt eine Abbildung von Vektoren auf Linearformen:

$$\lambda_u v := \langle u, v \rangle$$

definiert zu jedem Vektor u

Vektoren auf reelle Zahlen a .



$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ konstant}$$

Entsprechend gibt der euklidische Isomorphismus eine 1-Form ω zu jedem Vektorfeld \underline{F} :

$$\int_{\Gamma} dx \cdot \underline{F} = \int_0^1 dt \frac{dx(t)}{dt} \cdot \underline{F}(x(t))$$

Damit sind wir gerüstet für

$$\int_{\Gamma} dx \cdot \underline{F}(x)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 dt F_1 = \int_0^1 dt = 1$$

\Rightarrow Frage entlang x-Achse!

Auch der Umkehrschluss gilt: Ist $\oint \omega = 0$ auf allen geschlossenen Pfaden null, existiert eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$.

$$f(p) = \int_{\gamma} \omega$$

γ Pfad

Γ beginnt bei beliebigem Punkt, endet bei x : Weg γ da ω exakt!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_p^{p+h e_i} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \omega_{p+th e_i} (h e_i) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \omega_{p+th e_i} e_i dt = \omega_p e_i$$

da für alle weiteren Komponenten

$$\Rightarrow \omega = df$$

5.3.2 Wegintegrale von Vektorfeldern

Mithilfe des Wegintegrals für 1-Formen ist es möglich auch Integrale von Vektorfeldern einen Sinn zu geben. Dazu muss aus einem Vektor ein Element der Dualraum konstruiert werden:

$$\lambda_{p_0} (p_1 - p_0) \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$"v" (p_1 - p_0) \in \mathbb{R} \quad ?$$

Kenntnis: In einem euklidischen Raum definiert das Skalarprodukt eine Abbildung von Vektoren auf Linearformen:

$$\lambda_u v := \langle u, v \rangle \quad \forall v$$

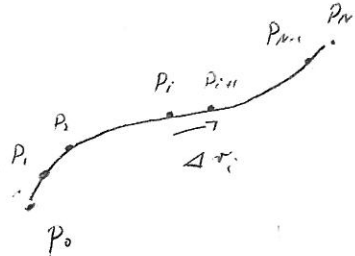
definiert zu jedem Vektor u eine Linearform λ_u , die beliebige Vektoren auf reelle Zahlen abbildet. (euklidische Isomorphismus)

Entsprechend gibt der euklidische Isomorphismus für jedes Vektorfeld eine 1-Form

Damit sind wir gerüstet für Integrale der Form

$$\int_{\Gamma} dx \cdot \underline{F}(x)$$

Hemmitisch ist ein solches Integral interpretierbar als



$$\Delta r_i = P_{i+1} - P_i$$

$$\int_{\Gamma} dr_i \cdot F(r_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i \Delta r_i \cdot \underline{F}(r_i)$$

So ist es in der meisten Lehrbüchern definiert, und das ist auch ok.

Parameterisiert man jetzt \$\Gamma\$ durch \$t\$ ist

$$\int_{\Gamma} dr_i \cdot F(r_i) = \int_0^1 dt \frac{dr_i}{dt} \cdot \underline{F}(r(t)) = \int_0^1 dt \left\langle \frac{dr_i}{dt}, \underline{F}(r(t)) \right\rangle$$

\$\frac{dr_i}{dt}\$ in Koordinatenform

$$= \int_0^1 dt \left(\frac{dx_i(t)}{dt} F_x(r(t)) + \frac{dy_i(t)}{dt} F_y(r(t)) + \dots \right)$$

Mit dem euklidischen Isomorphismus lässt sich das Wegintegral eines Vektorfeldes aber auch in ein Wegintegral einer 1-Form überführen:

Betrachte wir \$dr_i\$ als Differential der Abbildung \$p \rightarrow p\$

bildet also jedes Element des Differenzvektorraums auf sich selbst ab.

$$dx v = v_x \quad dr_i v = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \quad (\text{in Koordinatenform})$$

$$\underline{F}(r) \cdot dr_i v = F(r) \cdot v$$

\$\Rightarrow \underline{F}(r) \cdot dr_i\$ ist eine 1-Form, ihr Integral damit

$$\int_{\Gamma} \underline{F}(r) \cdot dr_i = \int_0^1 dt \left(\underline{F}(r) \cdot \frac{dr_i}{dt} \right)$$

↑ Same 1-Form
↙ Vektor

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz$$


$$= \int_0^1 dt \underline{F}(r) \cdot \frac{dr_i}{dt} = \int_0^1 dt \left\langle \underline{F}(r(t)), \frac{dr_i}{dt} \right\rangle$$

\$\frac{dr_i}{dt}\$ in Koordinatenform

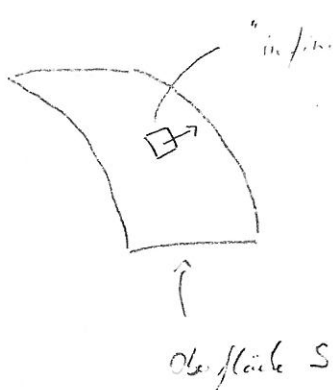
wie oben. Fast alle sinnvollen Definitionen von Linienintegralen lassen sich so auf 1-Formen zurückführen (auch wenn wir das nicht immer tun wollen).

5.4 Das Oberflächenintegral

Das Wegintegral definierte das Integral eines Vektor- oder Skalarfeldes entlang einer Linie γ . Oberflächenintegrale erlauben Vektor- und Skalarfelder auf Flächen zu integrieren

- ┌ - Ladungsdichte auf der Oberfläche eines metallischen Körpers 
- Gesamtladung \rightarrow Flächeintegral der Ladungsdichte
- Oberfläche eines Körpers \rightarrow Flächeintegral von 1

Wie beim Wegintegral gibt es einen Zugang über Formen, und dann per einstelligen Isomorphismen eine Interpretation mit "infinitesimalen Flächenelementen". Wir werden dieses Mal auf den formale Zugang verzichten.



"infinitesimales Flächenelement"

$d\underline{S}$ betrachten wir als Vektor dessen Länge gleich der Fläche des Flächenelements ist, und der senkrecht zur Oberfläche steht.

Addition aller Flächenelemente im Grenzfall, dass \square unendlich klein wird, führt auf

$$\int_S d\underline{S} \cdot \underline{F}(\underline{x})$$

Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

$$\int_S dS \phi(\underline{x})$$

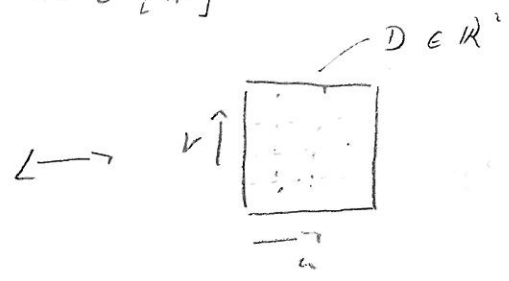
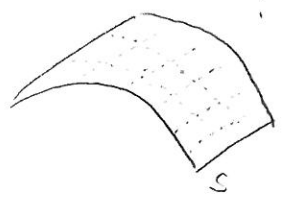
— " — — — — — ein Skalarfeld

Zur Definition dieser Ausdrücke benötigt man eine Parametrisierung der Oberfläche, über die wir integrieren. (Vgl. Wegintegral)

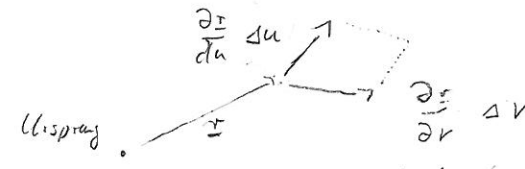
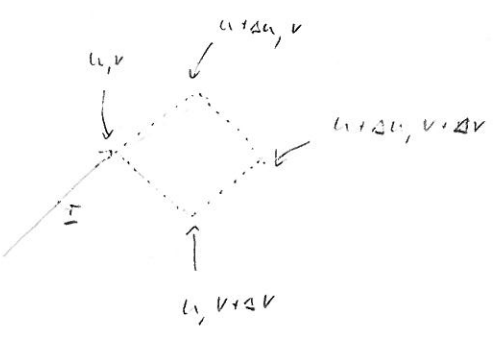
Eine Parametrisierung einer Oberfläche X (als Punktmenge) ist eine differenzierbare Abbildung von $D \in \mathbb{R}^2$ auf X

$$s: D \rightarrow X, \quad (u, v) \mapsto \underline{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

mit $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \neq 0, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \neq 0$ und $u, v \in [a, c]$



Heuristisch: Betrachte wir statt eines infinitesimalen Flächenelement ein "sehr kleines" Element der Oberfläche



das dem Flächenelement zugeordnete Vektor ist

$$\Delta \underline{s} = \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \Delta v \right) = \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v$$

Mit dieser Parametrisierung des Flächenelements definieren wir die Oberflächenintegrale

$$\int_D d\underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{x}) = \int_D du dv \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) \cdot \underline{F}(\underline{x}(u, v))$$

$$\int_S dS \phi(\underline{x}) = \int_D du dv \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \phi(\underline{x}(u, v))$$

(Vgl. Linienintegral $\int dt \frac{dx}{dt} \cdot F(\underline{x})$)

Beispiel: Das Quadrat $0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 1$ $z=0$ definiere die Oberfläche S

Bei diesem Beispiel können wir natürlich die Antworten. Trotzdem ist es hilfreich die Definitionen zunächst an einem sehr einfachen Beispiel anzuprobieren

$$\int_S dS = \int_S 1 \quad \text{ist der Flächeninhalt des Quadrats}$$

$$\int_S d\underline{S} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist der konstante Vektor } \underline{\hat{z}} \text{ integriert über } S$$

Als Parametrisierung bietet sich an

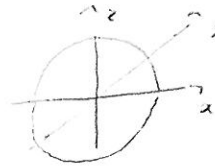
$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 0 \end{aligned}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_S dS = \int_0^1 \int_0^1 \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^1 \int_0^1 1 du dv = 1$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

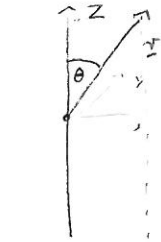
$$\int_S d\underline{S} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du dv = 1$$

Beispiel: Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

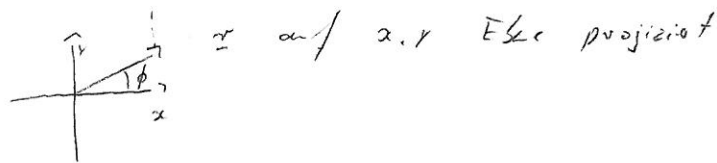


Eine geeignete (und häufig genutzte) Parametrisierung der Kugeloberfläche sind die

Winkel θ und ϕ



$$0 \leq \theta \leq \pi$$



= auf x, y Ebene projiziert

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}$$

R, θ, ϕ werden als Kugelkoordinaten eines Punktes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet, θ wird Polwinkel, ϕ als Azimutwinkel genannt.

Wir berechnen als Beispiel die Oberfläche einer Kugel.

$$S = \int_S dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right\|$$

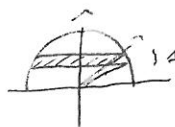
$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ +R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \\ R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \\ +R^2 (\cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi) \end{pmatrix}$$

$$= R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ + \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ + \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right\| = R^2 |\sin \theta| = R^2 \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R^2$$

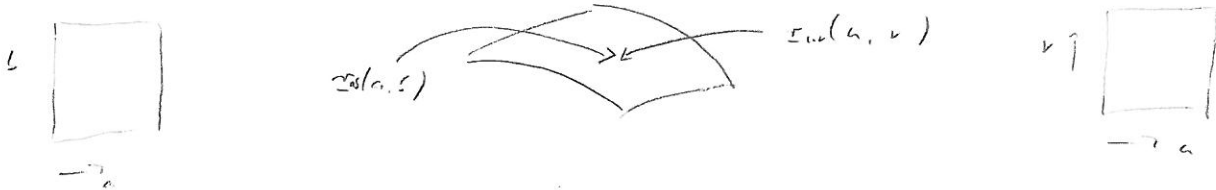
Geometrische Interpretation



Ring mit Radius $R \sin \theta$, Fläche $(2\pi \sin^2 \theta R) (R d\theta)$
 \Rightarrow Flächenelement $2\pi R^2 \sin \theta d\theta$

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Definitionen unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Oberfläche sind:

Wir betrachten eine zweite Parametrisierung a, b



nehmen an, dass $\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b}$ und $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ in dieselbe Richtung zeigen;

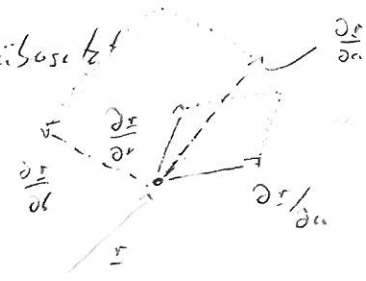
Mit $u = u(a, b)$ und $v = v(a, b)$ folgt aus $\underline{r}_{ab}(a, b) = \underline{r}_{uv}(u(a, b), v(a, b))$ und der Kettenregel

$$\frac{\partial \underline{r}_{ab}}{\partial a} = \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial a}$$

$$\frac{\partial \underline{r}_{ab}}{\partial b} = \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial b}$$

$$\text{oder} \begin{pmatrix} \partial \underline{r}_{ab} / \partial a \\ \partial \underline{r}_{ab} / \partial b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \underline{r}_{uv} / \partial u \\ \partial \underline{r}_{uv} / \partial v \end{pmatrix} = \underline{J} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{r}_{uv} / \partial u \\ \partial \underline{r}_{uv} / \partial v \end{pmatrix}$$

\underline{J} beschreibt die lineare Abbildung, die lokal von der Parametrisierung (u, v) in (a, b) übersetzt



\underline{J} wird als Jacobi-Matrix der Transformation von (u, v) nach (a, b) bezeichnet, die Änderung des Flächeninhalts ist (lokal)

$$\left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b} \right\| = \left| \det(\underline{J}) \right| \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\|$$

Da $\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b}$ und $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ beide senkrecht auf der Oberfläche stehen und parallel sind

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial b} \right) = \left| \det \underline{J} \right| \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{D_{ab}} da db \left(\frac{\partial \underline{r}_{as}}{\partial a} \times \frac{\partial \underline{r}_{as}}{\partial b} \right) \cdot F(\underline{r}_{as}(a,b))$$

$$= \int_{D_{as}} da db \left| \det \underline{J} \right| \left(\frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \right) \cdot F(\underline{r}_{uv}(u,v))$$

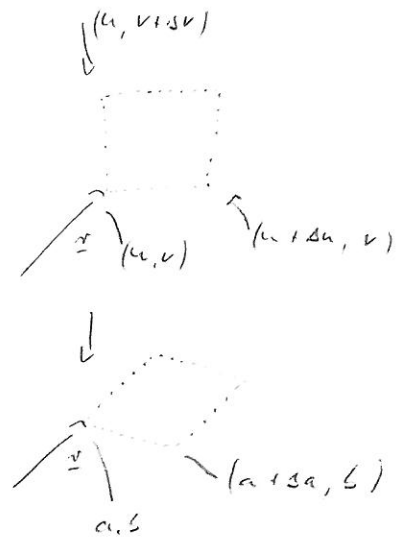
Das

Als letzter Schritt müssen wir jetzt noch die Integrationsvariable von (a,b) nach (u,v) ändern; lokal gilt

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial a & \partial u / \partial b \\ \partial v / \partial a & \partial v / \partial b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix}$$

$$= \underline{J}^T \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{J} = \det \underline{J}^T$$



$$\text{und} \int_{D_{uv}} du dv (\cdot) = \int_{D_{ab}} da db \left| \det \underline{J} \right| (\cdot)$$

$$= \int_{D_{uv}} du dv \left(\frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}_{uv}}{\partial v} \right) \cdot \underline{F}(\underline{r}_{uv}(u,v))$$

Die Definition des Oberflächenintegrals ist also unabhängig von der Wahl der Parameterisierung.

1

Notiz: Vorgehen mit Integration eine Variable und die Substitution $x' = -x$

$$\text{z.B. i) } \int_0^1 dx = \int_0^1 dx' (-1) = \int_0^1 dx'$$

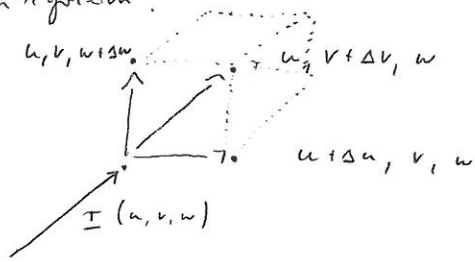
$$\text{ii) } \int_D dx = \int_{D'} dx' | -1 |$$

$$\text{mit } D: 0 < x < 1 \\ D': -1 < x' < 0$$

Intervall aufsteigend zu konstant
 \Rightarrow -1 als Jacobideterminant
 wichtig: integral Vorzeichen ab 5.14

5.5 Das Volumenintegral

Das Volumenintegral erlaubt Vektor- und Skalarfelder auf Volumina zu integrieren.



ΔV gibt das Volumen eines kleinen Volumenelementes an

$$\int_V dV \phi(\underline{r}) = \int du dv dw \underbrace{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \right) \right|}_{\text{Flächenelement}} \phi(\underline{r}(u, v, w))$$

Volumenelement

definiert das Volumenintegral eine skalare Funktion $\phi(\underline{r})$. Das Volumenintegral eines Vektorfeldes $\int dV \underline{F}(\underline{r})$ ist analog definiert. Beide Definitionen sind unabhängig von der Parameterisierung. (Selbst beweisen.)

Beispiel: Kugelvolumen $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$V = \int_V dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right) \right|$$

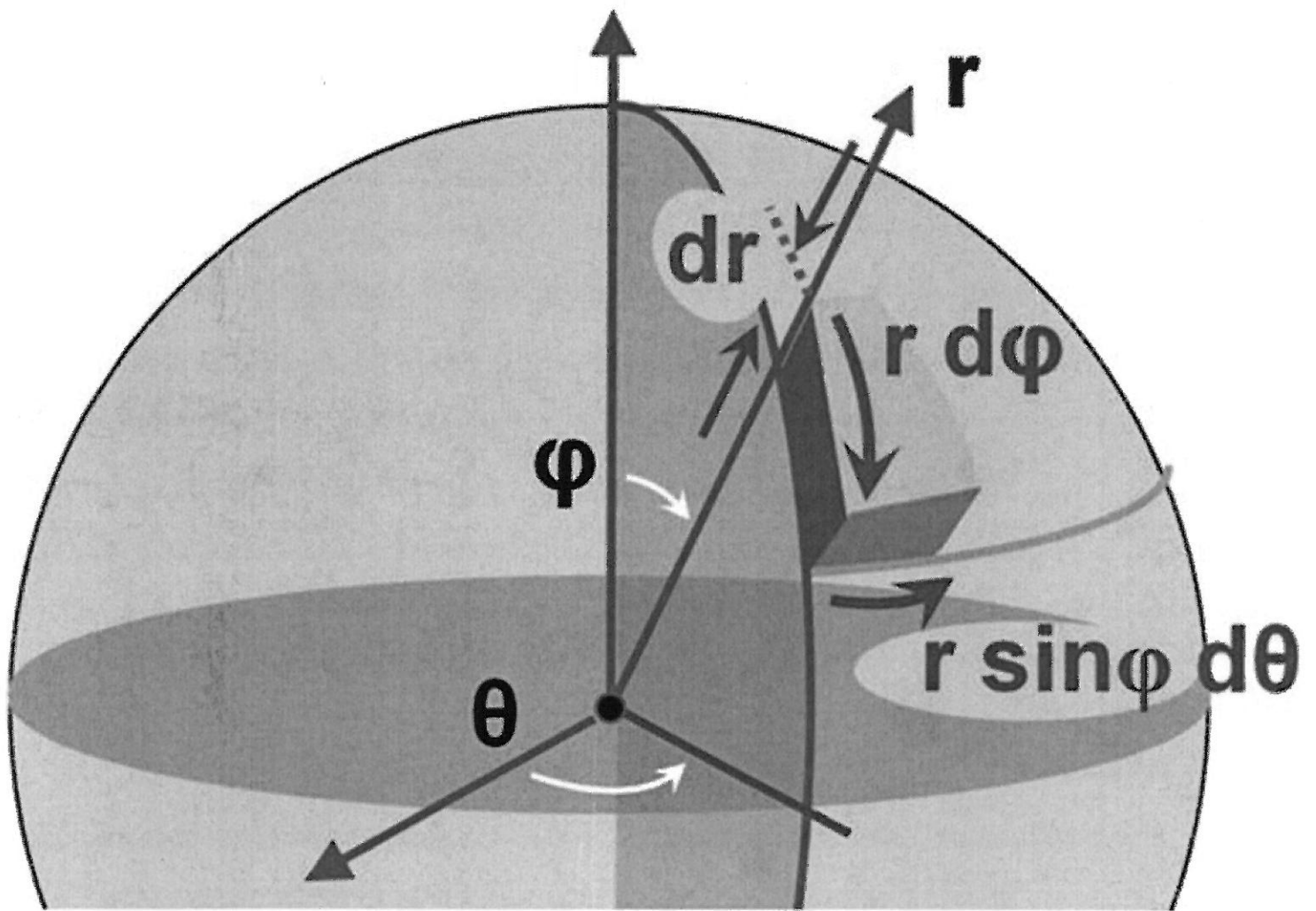
$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \right) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} r^2 \sin \theta$$

$$= r^2 \sin \theta$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \left(\int_0^R dr r^2 \right) \left(\int_0^\pi d\theta \sin \theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right)$$

$$= \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3$$



5.6 Krümmungslinige Koordinaten

Prinzipiell lässt sich jedes (klassische) Problem in kartesischen Koordinaten behandeln, oft sind "problemangepasste Koordinaten" krümmungslinige Koordinaten sinnvoll.

(- Abstände auf Kugeloberfläche)

- Parametrisierung des Kugelvolumens durch Kugelkoordinaten

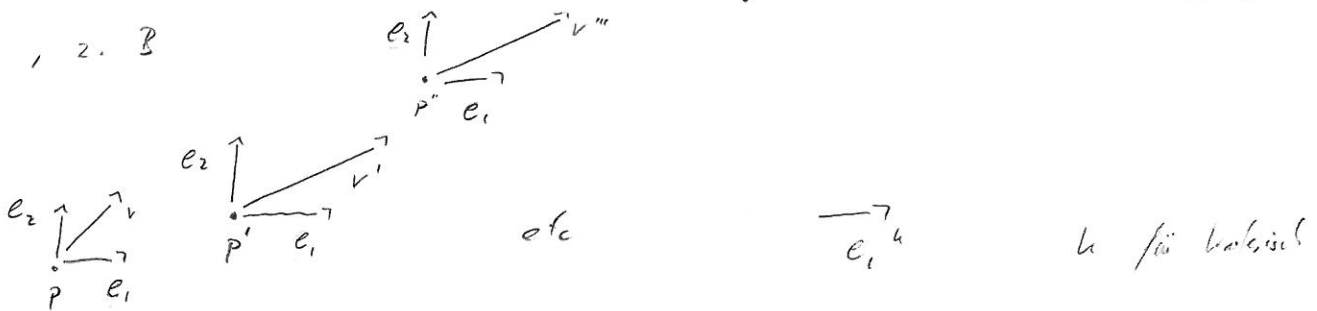
- allgemeine Relativitätstheorie: Energie-Masse krümmt die 4 Raumzeit

5.6.1 Vektorbasen in krümmungslinigen Koordinaten

Wir betrachten ein Vektorfeld v auf einem affinen Raum M . Jedem Punkt $m \in M$ ist ein Vektor $v \in V$ zugeordnet.

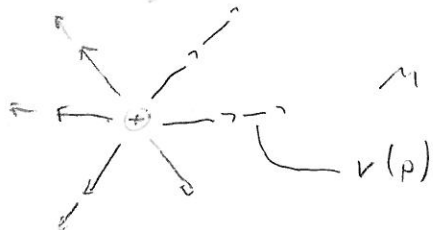
Als Basis dieser Vektoren kann man an jeder Stelle dieselbe Basis nutzen, z. B.

2D

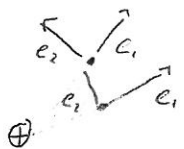


(kartesische Basis in 2D)

In diesem Beispiel alleckung



macht es Sinn an jeder Stelle unterschiedlich orientierte Basisysteme zu verwenden



$e_i^R(p)$ zeigt die Richtung des Feldes und hängt von p ab

Wie hängen die Basisvektoren mit den Koordinaten zusammen?

Betrachten wir Koordinaten u, v, w , die den 3D Raum parametrisieren.

Die 3 Vektoren $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{r}}{\partial w}$ sind i.d. nicht normiert.

Die normierten Vektoren

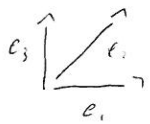
$$\underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{r} / \partial u}{\| \partial \underline{r} / \partial u \|}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\partial \underline{r} / \partial v}{\| \partial \underline{r} / \partial v \|}$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\partial \underline{r} / \partial w}{\| \partial \underline{r} / \partial w \|}$$

sind Einheitsvektoren, die in Richtung der Koordinatenlinien liegen, d.h. entlang der Linien mit 2 oder 3 Koordinaten konstant.

e.g. kartesische Koordinaten $u = x$, $v = y$, $w = z$



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an jedem Ort gleiche Basis

e.g. Kugelkoordinaten

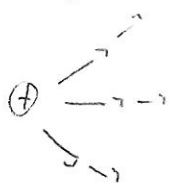
$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1^R = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

etc.

$\Rightarrow \underline{e}_1^R$ ist parallel zu \underline{r}

\Rightarrow Ein radialsymm. Vektorfeld hat in der Kugelkoordinatenbasis nur eine Komponente entlang \underline{e}_1



$$\underline{v}(p) = f(r) \underline{e}_1^R$$

Jeder Vektor $v \in V$ an Punkt $p \in M$ kann jetzt durch die lokale Basis dargestellt werden

$$\underline{v}^R(p) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in kartesischen + Basis}$$

$$\underline{v}^k(p) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{in kugelpolare Koordinaten + Basis}$$

Fast alle Koordinatensysteme, die in der Praxis genutzt werden sind orthogonal, also $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

5.6.2 Das Abstandsmaß in kartesischen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten ist der Abstand zwischen zwei Punkten mit den Koordinaten (x, y, z) und $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta s$$

$$\text{oder } \Delta s^2 = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

In kartesischen Koordinaten kann die Beziehung nicht so einfach sein.

Erhöht man z.B. den Azimutwinkel ϕ in einem Kreisbogen um noch eine volle Umdrehung wird zum Ausgangspunkt \Leftrightarrow erhöht man x immer weiter nimmt die Entfernung stets zu.

Mit $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ können wir jedoch

Δx , Δy , Δz durch Δu , Δv , Δw ausdrücken

Für kleine Δu , Δv , Δw (lineare Näherung) gilt

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{J}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = (\Delta u \ \Delta v \ \Delta w) \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

$$= (\Delta u \ \Delta v \ \Delta w) \cdot \mathbb{g} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

\mathbb{g} wird als die metrische Tensoren bezeichnet.

Beispiel in 2D: Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \phi \end{pmatrix}$$

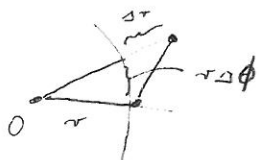
$$\mathbb{J}^T$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$\mathbb{g} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \Delta \phi^2$$



$$l^2 = \int dt \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \cdot \mathbb{g} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix}$$

5.19

5.7 Der Gradient

Nachdem wir Integrale von Vektorfeldern definiert haben, beschäftigen wir uns mit Differentialoperatoren auf Feldern

- Gradient eines skalaren Felds: Vektor
- Rotation eines Vektorfelds: Vektor
- Divergenz eines Vektorfelds: Skalar

Diese Objekte haben wieder Formen an denen sie enblich isomorph sind, ausser beim Gradienten wo wir diese Verbindungen als nicht weiter verfolgen.

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann wird der Spaltenvektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

als Gradient von f an Ort p bezeichnet. (Euklidischer Raum, kartesische Koordinaten)

∇f hat also dieselben Komponenten wie df ! (in best. Koordinaten!)

$df \cdot v$
 $\nabla f \cdot \underline{v}$ } geben Änderung von f in erste Ordnung an, wenn man einen kleinen Schritt von p nach $p + h \cdot \underline{v}$ tut ($h \ll 1$)

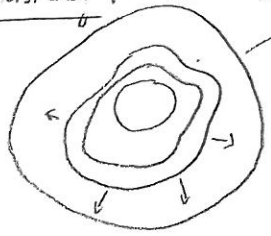
∇f und df sind also enblich isomorph,

$$\int_C \underline{dr} \cdot \nabla f \quad (\text{vgl. } \int_C df)$$

ist weg unabhängig, und umgekehrt: wenn $\int_C \underline{dr} \cdot \underline{F} = 0 \quad \forall$ geschlossenem Wege, dann existiert eine Funktion f mit $\underline{F} = \nabla f$ ("Stromfunktion").

Das Vektorfeld \underline{F} wird dann als Gradientenfeld bezeichnet.

Visualisierung: Wie betrachten eine Funktion auf einem 2D affinen Raum



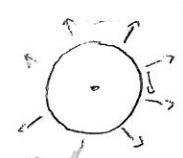
Linien mit konstanter f ("Höhenlinien" wenn f die Höhe einer Oberfläche angibt)

Linien geben (lokal veränderliche) Form an, ∇f die dazu orthogonale Vektor ∇f zeigt in Richtung der grössten Veränderung

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (f gibt die Entfernung vom Ursprung an)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \partial f / \partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{x}{\|x\|}$$

steht senkrecht auf Kugeloberfläche

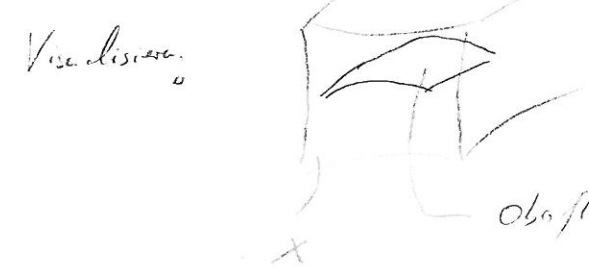


$$\nabla f \cdot v = \begin{cases} 0 & \text{wenn } v \text{ tangential zur Kugeloberfläche liegt} \\ \neq 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anwendung: Optimierung unter Nebenbedingung (Lagrange-Multiplikatoren)

Gesucht sei das lokale Maximum einer Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ unter einer

Nebenbedingung $g(x) = 0$



Oberfläche mit $g(x) = 0$, ∇g steht senkrecht zur Oberfläche

Stellen wir uns vor, die gesamte Oberfläche $g(x) = 0$ abzuheben, auf der Suche nach dem lokalen Maximum von $f(x)$.

An diesem Maximum ist der Gradient von $f(x)$ orthogonal zur Oberfläche $g(x) = 0$! (Wenn ∇f eine Komponente tangential zu $g(x) = 0$ hätte, würde sich $f(x)$ bei einem kleinen Schritt in diese Richtung in erste Ordnung ändern, das widerspricht jedoch der Annahme des Maximums - kein Maximum ändert sich f erst in zweiter Ordnung!).

$\Rightarrow \nabla f$ ist parallel zu ∇g

$$\Rightarrow \nabla f = \mu \nabla g \Rightarrow \nabla(f - \mu g) = 0$$

} Löse nach x und μ gibt Maximum
 $g(x) = 0$ } μ : Lagrange-Multiplikatoren

Wir kommen noch einmal kurz zu Gradientenfeldern zurück: Sei $\underline{F}(\underline{x})$ ein Gradientenfeld mit

$$\underline{F}(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Für $f(\underline{x})$ gilt allerdings auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

und mit $F_i = (\underline{F})_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i-te Komponente eines Vektorfeldes)

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

Ein Gradientenfeld in 3D hat damit

$$\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0$$

5.8 Die Rotation (engl. curl)

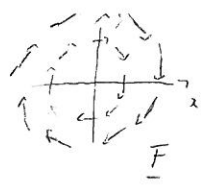
In 3D und kartesischen Koordinaten läßt sich für ein Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$ ein Spaltenvektor mit Komponenten

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix}$$

definieren. $\nabla \times$ soll an das Kreuzprodukt erinnern: " $\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ "

Ein Gradientenfeld $\underline{F} = \nabla f$ hat (s.o.) Rotation null: $\nabla \times \nabla f = 0 \quad \forall f$.

Beispiel: $\underline{F}(x) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$



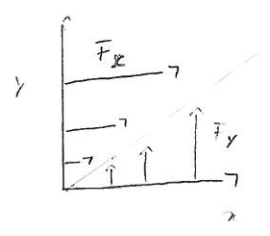
$\nabla \times \underline{F}$
 (da Vektoren nach außen hin immer größer werden)

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (-x) \\ \frac{\partial}{\partial z} y - \frac{\partial}{\partial x} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (-x) - \frac{\partial}{\partial y} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Induktion: $\underline{F}(x)$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit
 $\nabla \times \underline{F}$ beschreibt wie sich ein kleiner Ball mit festem Mittelpunkt an Ort x _{rotiert}
 ($|\nabla \times \underline{F}|$ ist proportional zu Winkelgeschwindigkeit, die Richtung von $\nabla \times \underline{F}$ gibt die Drehachse an)

Warum gibt z.B. $(\nabla \times \underline{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ die "Kreuzbildung" des Vektorfeldes (hier: in der xy -Ebene) an?

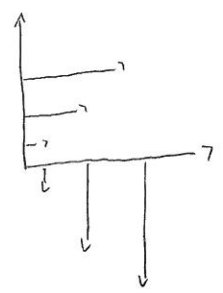
keine Kreuzbildung



$$\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

(Beide positiv, gleiche Vorzeichen)
 $\Rightarrow (\nabla \times \underline{F})_z = 0$

Kreuzbildung



$$\frac{\partial F_y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

haben unterschiedliche Vorzeichen
 $\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq 0$

Kreuzbildung $\nabla \times \underline{F} \neq 0 \Leftrightarrow$ Wirbelgebiete sind wegzuschleichen



c , geschlossen = 0

was c ist dann folgt 1.40

5.9 Die Divergenz

ist eine Abbildung von einem Vektorfeld auf ein skalares Feld, definiert durch

$$\nabla \cdot \underline{F}(x) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

∇ soll an das Skalarprodukt erinnern " $\nabla \cdot \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ "

Beispiel: $\underline{F}(x) = \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



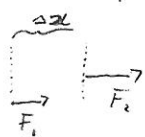
$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(konstant)

(da Vektoren nach außen hin immer größer werden)

Intuition: $\underline{F}(x)$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit
 $\nabla \cdot \underline{F}$ gibt an, wieviele Flüssigkeit netto aus einem kleinen Volumen herausfließt (pro Volumen).

Rechnung in 1D:



$$\frac{\partial F_x}{\partial x} \approx \frac{F_2 - F_1}{\Delta x}$$

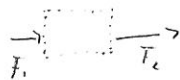
gibt an, wie stark sich F_x in x -Richtung verändert

Dichtänderung pro Zeit

$$= \frac{\Delta t F_2 - \Delta t F_1}{\Delta t \Delta x} \leftarrow \text{Netto Ausfluss}$$

$$= - \frac{\partial F}{\partial x}$$

Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen:



Differenz fließt an beiden über ab, führt damit zu $\frac{\partial F_x}{\partial t}$ oder ändert die Dichte ρ .

$\nabla \cdot \underline{F} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ scheint eine partielle Verallgemeinerung auf $D > 1$ zu sein, die wir im Folgenden ausführlicher untersuchen werden.

5.10 Notation und Transformationsregeln

Die Notation ∇f (Gradient), $\nabla \times \underline{F}$ (Rotation), $\nabla \cdot \underline{F}$ (Divergenz) legt nahe ein Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

genannt "Nabla" informell als "Nicht" zu betrachten

Gedächtnisstütze: ∇ als Vektor betrachten ergibt die korrekten Definitionen von Gradient, Rotation, Divergenz

Das weitere $\nabla^2 f(\underline{x}) = \nabla \cdot \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\underline{x})$ Laplace Operator

Weitere nützliche Notation: Die Einsteinsche Summenkonvention

• $\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i$

paarweise auftratene Indizes i, j gelten als symmetrisch $\sum_{i=1}^n$

• $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } ijk \text{ eine zyklische Permutation von } 123 \text{ ist (123, 312, 213)} \\ -1 & \text{--- "--- antizyklische --- " --- (132, 213, 321)} \\ 0 & \text{sonst (ein Index tritt doppelt)} \end{cases}$

Beispiel: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_i x_i y_i = x_i x_i$

$$\nabla \cdot \underline{F} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} F_i = \partial_i F_i$$

$$(\underline{x} \times \underline{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

$$(\nabla \times \underline{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

Transformationsregeln von Gradient, Rotation, Divergenz

Wie lassen ∇f , $\nabla \cdot \underline{v}$, $\nabla \cdot \underline{v}$ komponentenweise definiert für eine ortonormale Basis. Wie verhalten sich Gradient, Rotation und Divergenz unter Koordinatentransformationen? (hier: Gradient)

- unter Rotation der Koordinatenachsen ändern sich die Komponenten eines Vektors, s. 4.7.2

$$\underline{v}' = \underline{L} \cdot \underline{v} \quad \text{z.B. in 2D} \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Wenn ∇f ein Vektor ist, müssen seine Komponenten sich auch unter Rotation wie die Komponenten eines Vektors transformieren (ebenso $\nabla \cdot \underline{v}$, $\nabla \cdot \underline{v}$ muss als Skalar invariant unter Rotation sein) (sonst wäre wenn ∇f und \underline{v} parallel sind $(\nabla f)'$ und \underline{v}' nicht parallel)

Wie betrachten ein kartesisches Koordinatensystem $\{x_1, x_2, \dots\}$ und ein zweites System $\{x'_1, x'_2, \dots\}$, dessen Koordinaten aus einer linearen Transformation des $\{x_1, x_2, \dots\}$ hervorgehen (Streckung, Drehung, Spiegelung)

$$\underline{x}' = \underline{S} \cdot \underline{x}$$

$$\text{oder } x'_i = \sum_j S_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = S_{ij}$$

und $x_i = \sum_j \tilde{S}_{ij} x'_j$

Gradient in $\{x'_1, x'_2, \dots\}$ Koordinaten:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_j \tilde{S}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Kettenregel

Transformation der Komponenten eines Vektors

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \neq S_{ij} !$$

Transformation der Komponenten eines Gradienten

Unter allgemeinen linearen Transformationen transformieren die Komponenten des Gradienten nicht wie die eines Vektors (Zusatz: bei $\frac{\partial}{\partial x_i}$ steht x im Nenner, bei x_i in Zähler). Für Rotationen gilt allerdings

$$\underline{S}^T \underline{S} = \underline{1} \quad \Rightarrow \quad \underline{S}^T = \underline{S}^{-1}$$

$$\left[\tilde{S}^T \right]_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \left(S^{-1} \right)_{ij} \quad \Rightarrow \quad \tilde{S}^T = S^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{S}^T = S^T \quad \Rightarrow \quad S = \tilde{S}$$

Unter Rotation transformieren Komponenten eines Gradienten wie Komponenten eines Vektors

5.11 Integraltheoreme

Das Fundamentalthema der Analysis

$$\int_a^s dx \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) = f(s) - f(a)$$

verbindet die Werte von $f(x)$ an den Enden des Intervalls $[a, s]$ mit dem Integral der Ableitung von $f(x)$.

In höheren Dimensionen als eine existierende Verallgemeinerung dieser Theoreme, die Integrale über eine Oberfläche oder ein Volumen von einer Ableitung mit einem Integral über den Rand (Linie, Fläche) verbinden. Was also "im Inneren" (Volumen) geschieht ist bereits durch "den Rand" festgelegt.

⌈ Vor allem in der Elektrodynamik werden diese Theoreme genutzt.

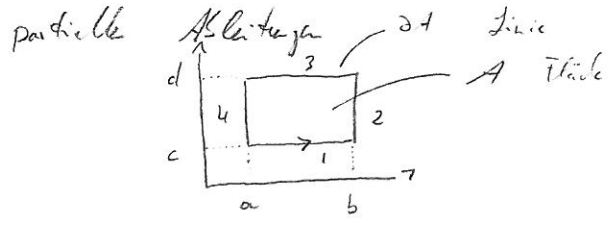
$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$$

ist eine der Maxwell-Gleichungen und verbindet die Divergenz des elektrischen Feldes $\underline{E}(\underline{r})$ mit der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ an der selben Stelle.

Ein Integraltheorem erlaubt das Integral von $\underline{E}(\underline{r})$ über eine geschlossene Oberfläche mit dem Integral der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ über das eingeschlossene Volumen in Beziehung zu setzen (= eingeschlossene Ladung!)

5.11.1 Das Green'sche Theorem in zwei Dimensionen

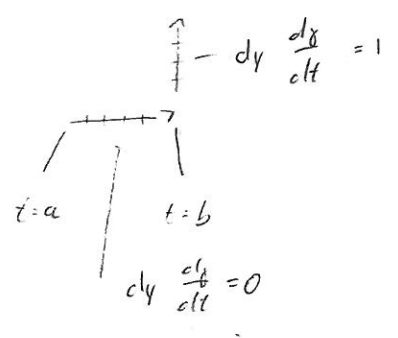
Wir betrachten zwei Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ mit kontinuierlichen



$$\iint_A dx dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d dy [Q(b, y) - Q(a, y)] \quad (1)$$

Vergleich mit dem Wegintegral

$$\oint_{\partial A} dy Q(x, y) = \int_c^d dt Q(x, y) dy \frac{dy}{dt} = \int_c^d dy Q(b, y) + \int_d^c dy Q(a, y) = \int_c^d dy [Q(b, y) - Q(a, y)] \quad (2)$$



$$\Rightarrow \iint_A dx dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \oint_{\partial A} dy Q(x, y) \quad (3) \quad \text{für das gezeichnete Rechteck}$$

Analog lässt sich für $P(x, y)$ zeigen

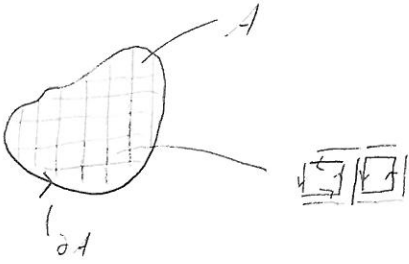
$$-\iint_A dx dy \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial A} dx P(x, y) \quad (4)$$

und in Kombination von (3) und (4)

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \oint_{\partial A} (dx P(x, y) + dy Q(x, y)) \quad (5)$$

(Wegintegral gegen die Uhrzeigersinn)

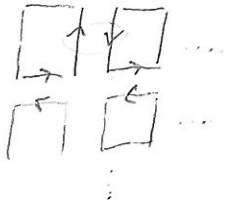
Wir haben (E) für ein Rechteck bewiesen. Betrachte eine Fläche A der (x, y) Ebene, die als Grenzfall eine Menge von kleinen Rechtecken betrachtet werden kann:



Die Summe von (E) über alle Rechtecke ergibt für die Doppelintegrale (links)

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

für die Linienintegrale löst sich alle Beiträge von Inneren von A gegenseitig aus



von Rand erhält man

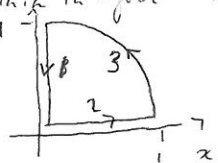
$$\oint_{\partial A} (dx P(x, y) + dy Q(x, y)) = \iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{Green's Theorem}$$

Beispiel: $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = 0$

$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \iint_A dx dy \quad \text{Fläche } A$$

$$\oint_{\partial A} dx P(x, y) + dy Q(x, y) = \oint_{\partial A} dx x$$

\Rightarrow Linienintegral kann berechnet werden von einer Fläche zu Kurven, z. B. $\frac{1}{4}$ -Kreis



1. ist Null, da Integral $x = 0$

2. ist Null, da $dy \frac{dy}{dt} = 0$ (Parameterisierung durch θ)

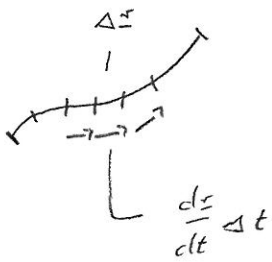
$$3. \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{dy(\theta)}{d\theta} x(\theta) = \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$$

$$y(\theta) = \sin \theta \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$

$$x(\theta) = \cos \theta$$

Refreshen Linienintegrale

$$\int_c \underline{dr} \cdot \underline{F}(r) = \int_0^1 dt \frac{dr}{dt} \cdot \underline{F}(r)$$



$$\Rightarrow \Delta \underline{r} \cdot \underline{F} = \Delta t \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \underline{F}$$

$$= \Delta t \left(\frac{dx}{dt} F_x + \frac{dy}{dt} F_y + \frac{dz}{dt} F_z \right)$$

$$\int_c \underline{dr} \cdot \underline{F}(r) = \int_c \left(dx F_x(r) + dy F_y(r) + dz F_z(r) \right)$$

$$\int_c dx F_x(r) = \int_0^1 dt \frac{dx}{dt} F_x(r)$$



benötigt mit $F_x(r) = P(x, y)$ im Greenschen Theorem

Interpretation von dx als Linienelement (mit $dx e_x = 1, dx e_y = 0, \dots$)

Erinnerung: Wegintegral eine 1-Form

$$\int_c 1 = \int_0^1 dt \lambda_{p(t)} \frac{dp}{dt}$$

$$\int_c dx F_x(p) = \int_0^1 dt \left(F_x(p^{(t)}) dx \right) \frac{dp}{dt}$$

$dx \frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt}$

Linienelement
1-Form

$$= \int_0^1 dt \frac{dx}{dt} F_x(x(t), y(t), z(t))$$

5.11.2 Der Gauss'sche Integralsatz

"divergenz theorem"

Verbindet die Volumeneinheit der Divergenz eines Vektorfeldes mit seiner Oberflächeintegral

Wir betrachten ein Vektorfeld in 3D

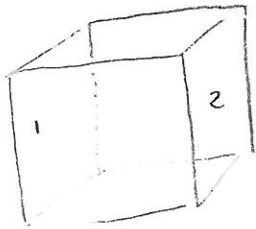
$$\underline{V}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$\underline{V}(\underline{r})$ könnte ein Strömungsfeld sein, $\underline{v} \cdot \underline{\Delta S}$ gibt an wieviele Teilchen pro Zeiteinheit durch ein kleines Flächelement ΔS strömen

└

Heuristisch:

Wir betrachten einen (kleinen) Quader mit Kantenlänge $\Delta x, \Delta y, \Delta z$



Der netto Fluss in x-Richtung (durch Fläche 2 minus durch Fläche 1) ist

$$\left(v_x \Big|_2 - v_x \Big|_1 \right) \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

In y-Richtung und z-Richtung erhält man

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

durch hintere und vordere Wand

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

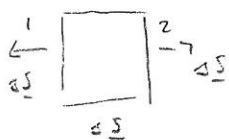
durch obere und untere Wand

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \underline{V} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ist der netto Fluss aus dem Würfel heraus.

Dieser Fluss lässt sich auch als Flächenintegral über die Oberfläche des

Quaders schreiben:



2. $\Delta S \cdot \underline{v}$ + Fluss hinaus

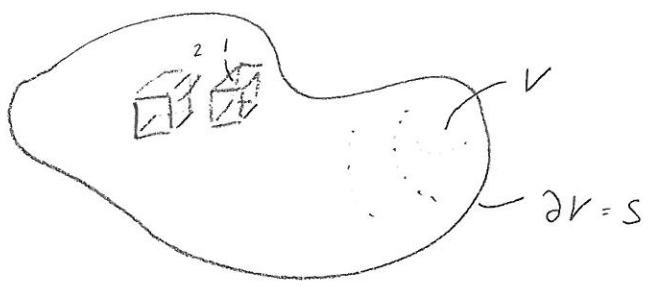
1. $\Delta S \cdot \underline{v}$ - Fluss hinein

$$\oint \Delta S \cdot \underline{v} = \oint \text{Netto Fluss aus Würfel hinaus} = \nabla \cdot \underline{V} \Delta x \Delta y \Delta z \quad [2.9]$$

$$\int d\underline{S} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \nabla \cdot \underline{v} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1)$$

S: Würfeloberfläche

$(v_x|_2 - v_x|_1) \Delta y \Delta z$ ist Beitrag zum Flächenintegral von Seite 1 nach 2
 Für ein Volumen, das sich in viele kleine Quader zerlegen lässt



heben sich die Beiträge benachbarter Seiten zum Flächenintegral weg. Die Summe von (1) über alle Quader ergibt

$$\int_{S=\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \int_V dV \nabla \cdot \underline{v} \quad \text{Gauss'scher Integralsatz}$$

Anwendung: die Kontinuitätsgleichung

Betrachten wir den Fluss einer Flüssigkeit aus Teilchen, die erhalten sind; also nicht an einer Stelle auf/treten ("Quelle") oder verschwinden ("Senke", "sink").

Rate mit der die Zahl der Teilchen im Quader anwächst = - Rate des Teilchenflusses aus dem Quader heraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = - \nabla \cdot \underline{v} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$\rho(\underline{r}, t)$ ist die Teilchendichte $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ die Zahl der Teilchen in einem kleinen Quader.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{v} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

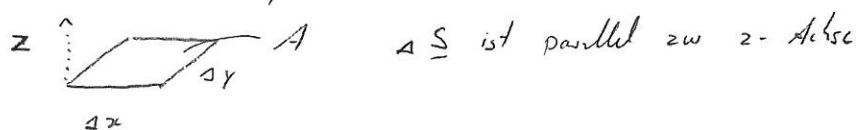
Bezeichnen wir die Zahl der Teilchen in einem Volumen V mit $N(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} N = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V dV \nabla \cdot \underline{v} = - \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{v}$$

5.11.3 Der Satz von Stokes (genauer Stokes-Kelvin Theorem)

Verbindet das Flächenintegral eine Rotation eines Vektorfeldes mit seinem Linienintegral.

Wir beginnen mit einer rechteckigen Flächelement, und legen die z-Achse orthogonal zu seiner Oberfläche.



Wir betrachten wieder ein Vektorfeld $\underline{v}(x)$ und nutzen das Greensche Theorem

mit $Q(x,y) = v_y(x,y)$

$P(x,y) = v_x(x,y)$

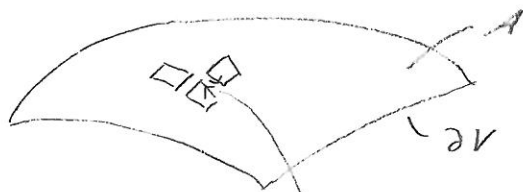
$$\iint_A dx dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \iint_A dx dy \underbrace{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{\substack{\text{z-komponente} \\ \text{von } \nabla \times \underline{v}}} = \int_A d\underline{S} \cdot (\nabla \times \underline{v})$$

|| Greensche Theorem || (2)

$$\oint_c dx P(x,y) + dy Q(x,y) = \oint_c dx v_x(x,y) + dy v_y(x,y) = \oint_c d\underline{r} \cdot \underline{v}(x)$$

da $d\underline{r}$ in der xy-Ebene liegt.

Für eine benachbarte Oberfläche, die man in (viele) kleine Rechtecke zerlegen kann



benachbarte Teilstücke des Linienintegrals heben einander auf

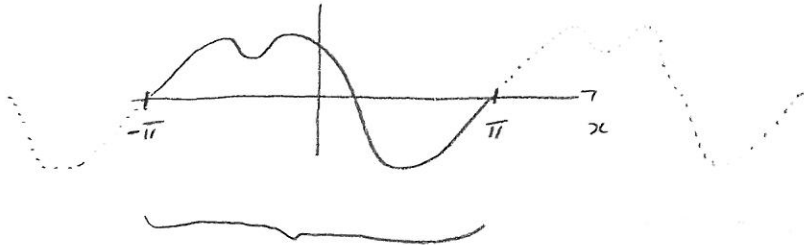
⇒ Summe von (2) über alle kleine Rechtecke ergibt

$$\int_A d\underline{S} \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \oint_{\partial A} d\underline{r} \cdot \underline{v}(\underline{r})$$

6. Fourierreihen

Kernidee: (Fast alle) periodische Funktionen lassen sich als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen schreiben.

z.B. sei $f(x)$ periodisch mit Periode 2π



Wir brauchen $f(x)$ nur auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zu kennen

$\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$

haben alle dieselbe Periodizität wie $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots \\ + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

(Fourier, 1807)

- Fragen:
- wie kann man die $\{a_n, b_n\}$ bestimmen? (sind sie eindeutig?)
 - wann existiert und wann konvergiert die Reihe?
 - stimmt die Reihe überall mit $f(x)$ überein?

Anwendung: • DGL, z.B. getriebene harmonische Oszillatoren: gelöst für sinusförmige Antriebskraft. Wenn wir eine beliebige periodische Antriebskraft als Summe von Kosinus und Sinusfunktionen schreiben, können wir die DGL für jeden Term separat lösen und (lineare DGL) die Lösungen addieren!

$$\int y(t) = f(t) = a_0 + a_1 \cos x + \dots \\ + b_1 \sin x + \dots$$


$$\int y_0 = t/2$$

$$\int y_{a_1}(t) = \cos x$$

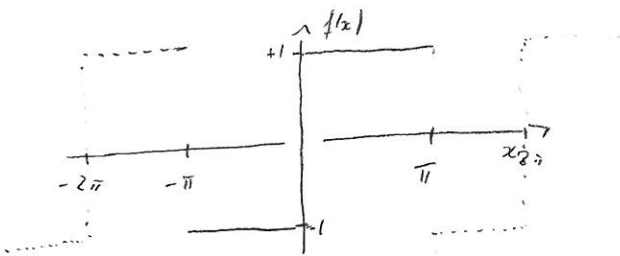
$$\int y_{b_1}(t) = \sin x$$

$$y(t) = a_0 y_0 + a_1 y_{a_1}(t) + \dots$$

$$+ b_1 y_{b_1}(t) + \dots$$

- partielle DGL, z.B. Wellengleichung. Wir hatten Lösung für sinusförmige Anfangsbedingung gegeben . Beliebige AB lässt sich als Summe von Sinusfunktionen schreiben.
- Funktionen als Element eines Vektorraums (Linearkombination von Funktionen ist eine Funktion): Sinus und Kosinus sind eine Basis des Raums periodischer Funktionen.

Beispiel



$$f(x) = -1 \quad -\pi < x < 0 \quad \text{und periodisch mit Periode } 2\pi$$

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (1)$$

Bestimmung von a_0 :

Integriere rechte und linke Seite zwischen $-\pi$ und π

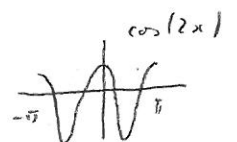
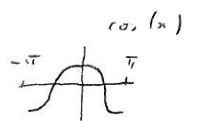
$$\text{Links} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \int_{-\pi}^0 dx (-1) + \int_0^{\pi} dx 1 = 0$$

$$\text{Rechts} \quad a_0 \text{ Term: } \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx a_0 = \frac{1}{2} \times 2\pi a_0 = \pi a_0$$

$$a_1 \text{ Term} \quad a_1 \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos x = a_1 \left[\sin x \right]_{-\pi}^{\pi} = a_1 (0 - 0) = 0 a_1$$

$$a_2 \text{ Term} \quad a_2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(2x) = a_2 \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 a_2$$

$$a_n \text{ Term} \quad a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx = a_n \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 a_n$$



$$b_n \text{ Term} \quad b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx = b_n \left[-\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad b_n$$

Sammelt man alle Terme es heißt man

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \right]$$

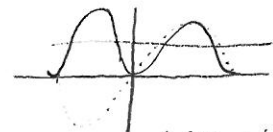
$$= \pi a_0$$

$\Rightarrow a_0 = 0$ eindeutig bestimmt!

2. Bestimmung von a_k, b_k

Wir brauchen folgende Integrale benötigt

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(kx) = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \quad k > 0$$



periodische Funktion mit Mittelwert $\frac{1}{2}$

(folgt aus $\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2 kx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2 kx$)

$$\text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos^2 kx + \sin^2 kx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx 1 = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \cos lx = 0 \quad \forall k, l > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin kx \sin lx = 0 \quad k \neq l$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos lx = 0$$

z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos kx \cos lx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \frac{1}{2} (e^{ilx} + e^{-ilx})$,

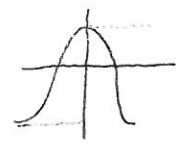
Ausmultiplizieren gibt 4 Terme also Term $\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{imx} = \left[\frac{1}{m} e^{imx} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{m} (e^{im\pi} - e^{-im\pi})$

$$= \frac{1}{m} \cos m\pi = 0 \quad m \neq 0$$

a_n : Multipliziere rechte und linke Seite mit $\cos lx$ und integriere von $-\pi$ zu π

Links $\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(lx) = 0$

$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)}_{\text{ungerade Funktion}} \underbrace{\cos(lx)}_{\substack{\text{gerade} \\ \text{Funktion}}} = \int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{f(x) \cos(lx)}_{\text{ungerade Funktion}} = 0$



Rechts: Beiträge von a_0 , $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ geben alle Null, bis auf

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos lx \cos lx \quad \text{mit } l = n$$

$$= a_n e^{\pi}$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(lx) = a_n e^{\pi} \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall l$$

b_n : Multipliziere rechte und linke Seite mit $\sin lx$ und integriere von $-\pi$ zu π

Links: $\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(lx) = - \int_{-\pi}^0 dx \sin(lx) + \int_0^{\pi} dx \sin(lx) = 2 \int_0^{\pi} dx \sin(lx) = -2 \left[\frac{1}{l} \cos lx \right]_0^{\pi} =$

$= + \frac{2}{l} \times \begin{cases} 2 & l \text{ ungerade} \\ 0 & l \text{ gerade} \end{cases}$

Rechts: Alle Beiträge geben Null, bis auf

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin lx \sin lx \quad l = n$$

$$= b_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2 lx = \pi b_n$$

$$\Rightarrow b_n = + \frac{4}{l\pi} \quad l \text{ ungerade, null sonst}$$

Oder $f(x) = + \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$

$$= + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x)$$

\Rightarrow Fourier / squarewave - fourier series in s. pdf

6.1 Fourierkoeffizienten für eine allgemeine periodische Funktion

Eine Funktion $f(x)$ sei periodisch auf dem Intervall $(-L, L)$.

Fourier Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

$$+ b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

Zur Berechnung von a_0 berechnen wir wieder den Mittelwert von $f(x)$ über eine Periode L .
Linke Seite $\int_{-L}^L dx f(x)$ Rechte Seite $\frac{1}{2} a_0 \times 2L + 0$

$$\int_{-L}^L dx f(x) = \frac{1}{2} a_0 \times 2L + 0$$

$L \cos, \sin$ über eine oder viele Perioden integriert zu Null

$$= a_0 L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x)$$

Zur Berechnung von a_e ($e > 0$) berechnen wir den Mittelwert von $f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$$\int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = a_e \int_{-L}^L dx \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = a_e \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx' \cos^2 x' = a_e \frac{L}{\pi} \times \frac{1}{2} \times 2\pi = a_e L$$

Rechte Seite, alle anderen Terme integrieren zu Null

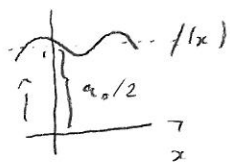
substitution $x' = \pi x/L$

$$\Rightarrow a_e = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\text{analog } b_e = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

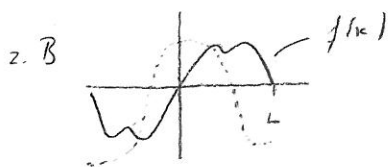
$\frac{a_0}{2}$ ist eine Konvention um die Formel für a_0 den Formeln für a_e $e > 0$ ähnlich zu machen

Intuition: • Da $\cos lx$, $\sin lx$ im Mittel über eine Periode Null ist
 man $\frac{a_0}{2}$ gleich dem Mittel von f über eine Periode sein

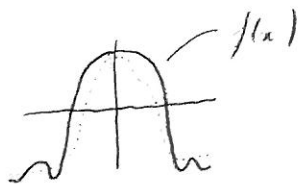


• $\int dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

gibt an wie "ähnlich" $f(x)$ der Funktion $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ist



$f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ist so oft positiv wie negativ \Rightarrow Integral ist null (oder klein)



hier ist $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ entlang einer Periode meist positiv $\Rightarrow a_n$ ist gross

($f(x)$ ist gut durch $\cos\frac{n\pi x}{L}$ gemittelt)

In der Akustik werden $\cos\left(\frac{2\pi\nu}{T}t\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi\nu}{T}t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi\nu}{T}t\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi\nu}{T}t\right)$

als Overtöne einer periodischen Schwingung mit Periode T ("Ton") bezeichnet.

Die "Wellenlänge" des Tons wird durch die Overtöne bestimmt (brilliant vs dumpf)

link www.uni-boch.de/rock/multimedien/obertonstruktur/schalls/akustik/lehre/2-D/

Formal: Fassen wir die Funktion $f(x)$ als Element des Vektorraums von Funktionen mit Periode L auf, kann man $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ als Basisvektoren betrachten.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots$$

$$+ b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots$$

CP. $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$

/ \

Koeffizient Basisvektor

$$a_c = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$b_c = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{i k x}{L}\right) \cos\left(\frac{j k x}{L}\right) = \delta_{k i}$$

$$\text{CP } v_i = \langle e_i, v \rangle$$

für Orthonormalsystem mit

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right), \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$ bilden ein Orthonormalsystem im Raum der Periodischen Funktionen. (Einschubung s.u.)

$$\text{Skalarprodukt } \left\langle \cos\left(\frac{i k x}{L}\right), \cos\left(\frac{j k x}{L}\right) \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{i k x}{L}\right) \cos\left(\frac{j k x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow a_e = \left\langle \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right), f(x) \right\rangle$$

$$b_e = \left\langle \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right), f(x) \right\rangle$$

6.1 Vollständigkeit der Basis: die Dirichlet Bedingung

Die Dirichlet Bedingung gibt an, wann eine Fourierreihe (punktweise) eine Funktion $f(x)$ punktweise gegen $f(x)$ konvergiert.

oder
- welche Funktionen sind durch Fourierreihen darstellbar

- für welche Art von Funktionen ist $\left\{ \cos \frac{\pi k x}{L}, \sin \frac{\pi k x}{L} \right\}$ eine Basis.

Theorem: Sei $f(x)$ im Intervall $[-L, L]$ quadratintegrabel, d.h.
 $\frac{1}{L} \int_{-L}^L dx |f(x)|^2$ ist endlich, dann ist an "fast allen Punkten"
 $f(x)$ gleich seine Fourierreihe. (Folson, 1966)

An fast allen Punkten Lebesgue (grob): überall, bis auf einzelne Punkte.

Welche Punkte problematisch sein könnten, beschreibt das folgende Theorem

Theorem (Dirichlet Bedingung, 1829)

Ist $f(x)$ periodisch mit Periode $2L$ und lässt sich in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist, und existieren an den Intervallgrenzen rechte und linke Grenzwert $f(x_+)$ und $f(x_-)$ konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ gegen

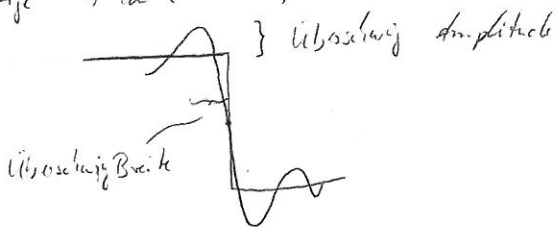
$$\begin{cases} f(x) & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ stetig ist} \\ \frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+)) & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ nicht stetig ist} \end{cases}$$

(\Rightarrow endlich Anzahl von Maxima, Minima, Sprünge ^{keine Divergenz}; Sprünge werden approximiert)

⚠ Gegen teil dazu dass es stimmt nicht, einige Funktionen die die Dirichlet-Bedingung verletzen haben dennoch konvergente Fourierreihen!

6.2 Das Gibbs-Phänomen

Approximiert man $f(x)$ durch eine endlich Fourierreihe fallen in der Nähe von Sprüngen starke Abweichungen zwischen $f(x)$ und der endlich Fourierreihe auf (Problem: Approximation einer nicht-stetigen Funktion durch stetige Funktionen)



siehe Figuren / Squarewave-Fourierreihe

Diese "Überschwinger" von ca. 9% der Sprünge (Rechteckwelle) nimmt in seiner Amplitude nicht ab wenn mehr Terme der Reihe berücksichtigt werden. Die Breite der Überschwinger nimmt aber mit zunehmender Zahl der Terme ab, und schrumpft mit $n \rightarrow \infty$ auf einen Punkt zusammen.

6.3 Komplexe Form der Fouri-Reihe

(für Intervall $[-\pi, \pi]$)

Aus der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ folgt

$$\cos hx = \frac{e^{ihx} + e^{-ihx}}{2}$$

$$\sin hx = \frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2i}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Fouri-Reihe ein erhält man die komplexe Fouri-Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots \quad c_n \in \mathbb{C}$$

• Vergleich mit alter Schreibweise $\frac{1}{2} a_0 = c_0, \quad c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \quad n > 0$

$$c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \quad n < 0$$

• für reelle $f(x)$ muss $c_{-n} = c_n^*$ gelten $(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_n^* e^{-inx} \in \mathbb{R})$

• oft ist die Fouri-Reihe in komplexer Form leichter zu berechnen.

Berechnung der Koeffizienten

$$c_0: \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = c_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)$$

c_n : multipliziere Reihe mit e^{-inx} und integriere über $[-\pi, \pi]$

$$\text{Rechts} \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x)$$

Links $\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} c_n e^{inx} + \text{Integrale über volle Perioden verschwinden}$

$$= c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

6.4 Parseval Theorem

verändert $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$ mit dem Betragquadrat der Koeffizienten der Fourierreihe.

• bei einer Schwingung $y(t)$ gilt $\frac{1}{2} k \int_{-T}^T dt |y(t)|^2$ die mittlere potentielle Energie an. (Federhärte k)

Wir bilden von

$$f(x) = c_0 + \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{ihn}$$

den Betragquadrat von beiden Seiten und integrieren über eine Periode

Linke Seite: $\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$

Rechte Seite: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(c_0 + \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{ihn} \right) \left(c_0^* + \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^* e^{-iln} \right)$

benutzen wir Integrationen von Null, ausser

$$c_0 c_0^*$$

$$c_n c_l e^{i(hn - ln)} \quad \text{mit } l = n$$

$$= 2\pi |c_0|^2 + 2\pi \sum_{h=-\infty, h \neq 0}^{\infty} |c_h|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |c_h|^2$$

Interpretation
als Länge des Vektors

Summe der Betragquadrate der Komponenten

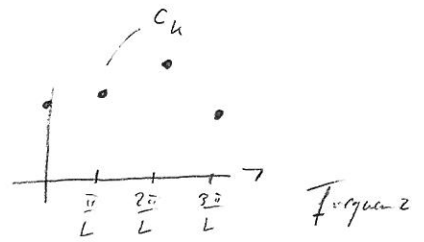
$$\text{CP} \quad \|v\|^2 = \sum_h v_h^2$$

6.5 Ausblick: die Fourier-Transformation

Natürlich sind nicht alle Funktionen periodisch, bzw. sie haben im allgemeinen eine unendliche Periode. Die Fourier-Transformation ist die Verallgemeinerung der Fourier-Reihe für $L \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n x \pi / L}$$

Oszillation mit Frequenz $\frac{n\pi}{L}$



\rightarrow im Limes $L \rightarrow \infty$ rückt die

Frequenz der Fourier-Reihe immer näher zusammen, aus c_n wird $c(k)$
 $k = n\pi/L$

aus der Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ wird ein Integral

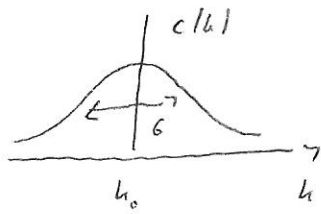
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} c(k)$$

$\tilde{f}(k) \equiv c(k)$ heißt Fourier-Transformierte von $f(x)$.

Vgl:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i n x \pi / L} f(x)$$
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n x \pi / L} c_n$$

Beispiel: Wir betrachten ein $c(k)$ mit Mittelwert k_0 und Varianz σ^2



Gaußkurve $\tilde{f}(k) = c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2\right\}$ $\sigma > 0$

und berechnen die entsprechende $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left\{ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2\right\}$$

Argument der Exponentialfunktion

$$ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k^2 - 2k_0k + k_0^2 - 2i\sigma^2 kx \right)$$

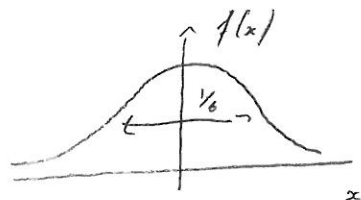
$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k^2 - 2k[k_0 + i\sigma^2 x] + [k_0 + i\sigma^2 x]^2 - [k_0 + i\sigma^2 x]^2 + k_0^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(k - [k_0 + i\sigma^2 x] \right)^2 + \underbrace{ik_0x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}_{\text{hängt nicht von } k \text{ ab}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(k - [k_0 + i\sigma^2 x])^2} \times e^{ik_0x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$$

Substitution $k' = \frac{1}{\sigma}(k - [k_0 + i\sigma^2 x])$ gibt $\sqrt{2\pi}\sigma$

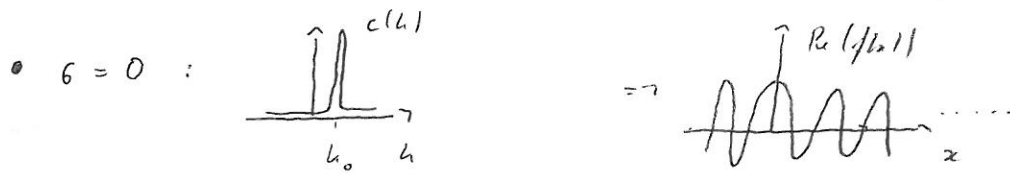
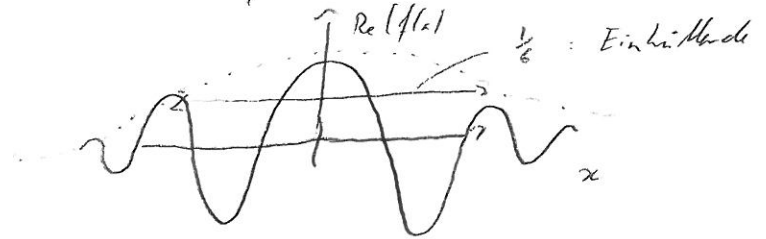
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + ik_0x\right\}$$



für $k_0 = 0$

• $k_0 = 0$: ist $c(k) \equiv \tilde{f}(k)$ eine breite Gausskurve ($\sigma \gg 1$), ist $f(x)$ eine schmale Gausskurve (\Rightarrow QM)

• $k_0 \neq 0$: k_0 gibt die Wellenzahl an, mit der $f(x)$ oszilliert

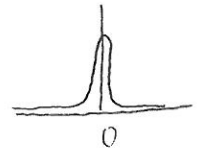


"einzelne peak in Frequenzspektrum"

• Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ ("c(k) = \tilde{f}(k) enthält alle Frequenzen")

$k_0 = 0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} k^2} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma^2 x^2\right\}$$



$$\equiv \delta(x)$$

$\delta(x)$ ist eine "Funktion" die überall null ist, bis auf $x=0$. Dennoch

ist $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$ (Integral existiert auch für $\sigma \rightarrow \infty$)

Da $\delta(x) = 0$ ausser $x=0$ ist auch $\int dx \delta(x-x_0) g(x) = g(x_0)$

FT von $\delta(x)$ ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, von $\delta(x-x_0)$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$

Im Limes $\sigma \rightarrow \infty$ ist $f(x)$ keine wohldefinierte Funktion. Da rigorose

Zugang definiert sogenannte Distributionen; Abbildungen von Funktionen auf die reellen Zahlen

$$g(x) \xrightarrow{\delta_{x_0}} g(x_0) \quad \int dx \delta(x-x_0) g(x) = g(x_0) \quad 6.13$$

6.5.1 Inverse Fouriertransformation

Wir nutzen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{ih(x-x_0)} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-\frac{1}{2}b^2 h^2 + ih(x-x_0)}$$

analog zur Rechnung $\frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2/b^2 - ihx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}b^2 h^2 - ihx_0\right\}$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} b^2} \exp\left\{-\frac{1}{2b^2}(x-x_0)^2\right\} = \delta(x-x_0)$$

Als nächstes zeigen wir, dass $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikh} f(x)$ die FT $\tilde{f}(h)$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{+ikh} \tilde{f}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{+ikh} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{+ikhx'} f(x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{+ih(x-x')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x') = f(x)$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \tilde{f}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikh} f(x) \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{+ikh} \tilde{f}(h) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{FT} \\ \text{inverse FT} \end{array}$$

Anwendungen

Der Kern fast aller Anwendungen der FT in der Physik ist die Eigenschaft, dass die FT von $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ $+ ik \tilde{f}(k)$ ist.

(aus Ableitung nach x wird Multiplikation mit $-ik$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-ikx}$$

\hookrightarrow wenn $f(x)$ in Grenzen auf $[-\infty, \infty]$

$$= + ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = + ik \tilde{f}(k)$$

z.B.

$$a u'' + b u' + c u(x) = g(x)$$

DGL ($x \rightarrow t$ gibt harmon. Oszill.)

FT von rechts und linken Seite

$$-ak^2 \tilde{u}(k) + ikb \tilde{u}(k) + c \tilde{u}(k) = \tilde{g}(k)$$

\leftarrow

$$\Rightarrow \tilde{u}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{c + ikb - ak^2}$$

\Rightarrow inverse FT gibt Lösung der DGL!

$$\bullet \frac{\partial}{\partial t} \phi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,t) \quad \text{partielle DGL (Wärme-gleichung)}$$

mit Anfangsbedingung $\phi(x,t=0) = P(x)$

$$\text{FT nach } x, \quad \tilde{\phi}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi(x,t)$$

auf beiden Seiten gibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\phi}(k,t) = -k^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(k,t) = V(k) e^{-k^2 t}$$

Bestimmung von $V(k)$ aus $\tilde{\phi}(k,t=0) = \tilde{P}(k)$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}(k) = \tilde{P}(k) e^{-k^2 t}$$