Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2017

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 09.05.2017, 12:00

Aufgabe 1: Nullstellen

(10 Punkte)

Wir nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ im Intervall $]a, b[$ nur einfache Nullstellen x_n hat, und dass für benachbarte Nullstellen gilt: $x_n - x_{n-1} > \Delta$. Dann lässt sich die Zahl der Nullstellen im Intervall $]a, b[$ bestimmen, indem man die Vorzeichenwechsel der Funktion $f(x)$ für die x-Werte $x = a + m\Delta$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ abzählt.

a) Schreiben Sie ein Programm, das die Zahl der Nullstellen der Funktion

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{100}x^2$$

bestimmt. (5 Punkte)

b) Schreiben Sie ein Programm, das die Zahl der Nullstellen in Abhängigkeit des Parameters m $(m > 1)$ für

$$f_m(x) = \sin(x) + \frac{1}{m}x^2$$

bestimmt. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen – Divisionsmethode

(8 Punkte)

Die Divisionsmethode zur Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen beruht auf der Division mit Rest, z.B. 41:2 = 20 Rest 1, oder allgemein $a : b =$ Ganzzahlquotient c Rest r, wobei gilt $a = bc + r$. Ganzzahlquotient und Rest lassen sich in Julia folgendermaßen bestimmen:

- `c = div(a,b)`
- `r = rem(a,b)`

Die Stellen z_1 bis z_n der Dualzahl erhält man, indem man iterativ die Division mit Rest auf c anwendet und $z_i = r$ setzt, wie in folgendem Beispiel veranschaulicht:

- 41:2 = 20 Rest 1 $\Rightarrow z_1 = 1$
- 20:2 = 10 Rest 0 $\Rightarrow z_2 = 0$
- 10:2 = 5 Rest 0 $\Rightarrow z_3 = 0$
- 5:2 = 2 Rest 1 $\Rightarrow z_4 = 1$
- 2:2 = 1 Rest 0 $\Rightarrow z_5 = 0$
- 1:2 = 0 Rest 1 $\Rightarrow z_6 = 1$

Die Dualzahl ergibt sich damit als $[101001]_2 = [41]_{10}$.

Schreiben Sie ein Programm, das die hier beschriebene Umwandlung mit Hilfe der Divisionsmethode durchführt.

Aufgabe 3: Darstellung reeller Zahlen als Kettenbruch

(13 Punkte)

Eine reelle Zahl (hier $x > 0$) lässt sich eindeutig als Kettenbruch der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \ , \quad a_n \in \mathbb{N} \ ,$$

darstellen.

a) Schreiben Sie ein Programm, das die Kettenbruchkoeffizienten a_0 bis a_N von x berechnet (5 Punkte). Hinweise:

- $a_0 = \lfloor x \rfloor$;
- $(x - a_0)^{-1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}$;
- $a_1 = \lfloor (x - a_0)^{-1} \rfloor$ etc.;

Aus den Kettenbruchkoeffizienten a_0 bis a_N erhält man einen *endlichen* Kettenbruch der Form:

$$q_N = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_N}}} \ .$$

b) Erweitern Sie das Programm so, dass aus den Koeffizienten $\{a_n\}$ die endlichen Kettenbrüche q_N berechnet werden. Geben Sie die relative Abweichung zwischen den q_N und x an. (5 Punkte)

c) Mit Hilfe der Kettenbruchmethode lässt sich eine Sequenz rationaler Näherungen q_i von x bestimmen, also

$$q_0 = a_0 \ , \quad q_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \ , q_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \ , \dots$$

Bestimmen Sie die rationalen Näherungen q_1 bis q_5 der Zahl π. Hinweis: In der Programmiersprache Julia lassen sich rationale Zahlen folgendermaßen darstellen: `1//3, 1//(1+1//5)`, etc. (3 Punkte)