Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2017

Blatt 3: Abgabetermin: Dienstag, der 16.05.2017, 12:00

Aufgabe 1: Nullstellen: Bisektion

(14 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, welches die Vorgehensweise von Aufgabe 1 (Blatt 2) zur Bestimmung der Zahl der Nullstellen mit dem Bisektions-Verfahren kombiniert. Betrachtet wird die Funktion

$$f(x) = \sin(x) + 0.02x^2 - 1/\pi \ ,$$

das Intervall ist $]-10, 10[$, die Schrittweite $\Delta = 0.02$. Sobald der Algorithmus einen Vorzeichenwechsel gefunden hat, also $f(x_m)f(x_{m+1}) < 0$, wird das Ausgangsintervall für das Bisektions-Verfahren entsprechend gesetzt. Hinweis: die Ableitung an den Nullstellen kann sowohl > 0 als auch < 0 sein. (4 Punkte für ein Programm, das mit diesem Verfahren nur die erste Nullstelle bestimmt, zusätzlich 3 Punkte für ein Programm, das alle Nullstellen bestimmt.)

b) Im Bisektions-Verfahren wird das Intervall $[x_l, x_u]$ in jedem Interationsschritt halbiert, d.h. $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_l + x_u)$. Verändern Sie das Programm so, dass das $\bar{x}$ zufällig im Intervall $[x_l, x_u]$ gewählt wird. Verwenden Sie dazu die Funktion `rand(1)`, welche eine Zufallszahl im Intervall $[0, 1]$ erzeugt. (4 Punkte)

c) Vergleichen Sie die Konvergenz des Bisektions-Verfahrens („B“) mit der Variante aus Teilaufgabe b) („BZ“). Berechnen Sie dazu die Differenzen

$$d_{\mathrm{B/BZ}} = \ln(x_u(i) - x_l(i))$$

in Abhängigkeit der Iteration i für beide Methoden (für eine der Nullstellen von $f(x)$) und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Nullstellen: Newton-Verfahren

(7 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \sin(x) - 0.3 + 0.5x$$

hat genau eine Nullstelle bei $x \approx 0.2$.

a) Schreiben Sie ein Programm, welches die Nullstelle dieser Funktion mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmt. (3 Punkte)

b) Im Gegensatz zum Bisektions-Verfahren ist die Konvergenz des Newton-Verfahrens nicht garantiert; dieses Problem lässt sich jedoch durch eine Kombination beider Verfahren vermeiden. Schreiben Sie ein Programm, in dem zunächst das Intervall $[-10, 10]$ mit dem Bisektions-Verfahren auf ein Intervall $[x'_l, x'_u]$ reduziert wird (wählen Sie dafür eine sinnvolle Anzahl an Iterationen), und anschließend der Wert $\bar{x}' = \frac{1}{2}(x'_l + x'_u)$ als Ausgangswert für das Newton-Verfahren verwendet wird. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Differentiation

(9 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, welches den Vorwärts-Differenzenquotienten $f'_{\mathrm{V}}(x_i)$ der Funktion

$$f(x) = \sin(x^2)$$

im Intervall $[-3, 3]$ (d.h. $x_1 = -3$, $x_N = 3$) für $N_1 = 10$, $N_2 = 100$ und $N_3 = 1000$ berechnet. N ist dabei die Zahl der Stützstellen, siehe Vorlesungsskript. Stellen Sie das Ergebnis für diese drei Werte von N zusammen mit dem exakten Ergebnis $f'(x)$ in einem Plot graphisch dar. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die mittleren Abweichungen

$$\Delta_{\mathrm{V}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |f'_{\mathrm{V}}(x_i) - f'(x_i)|$$

für den Vorwärts-Differenzenquotienten sowie

$$\Delta_{\mathrm{Z}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |f'_{\mathrm{Z}}(x_i) - f'(x_i)|$$

für den zentralen Differenzenquotienten, jeweils für $N = 100$. (5 Punkte)