Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2017

Blatt 4: Abgabetermin: Dienstag, der 23.05.2017, 12:00

Aufgabe 1: Integration – Trapez-Regel

(11 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, das das Integral

$$I = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Trapez-Regel berechnet. Wie im Vorlesungsskript ist dabei N die Zahl der Stützstellen mit $x_1 = 0$ und $x_N = \pi$, die Zahl der Intervalle ist also $N-1$. (3 Punkte)

b) Geben Sie die Abweichung vom exakten Ergebnis

$$\Delta I = |I_{\text{Trapez}} - I_{\text{exakt}}|$$

für $N = 100$ an. (1 Punkt)

c) Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt für den Fehler ΔI:

$$\Delta I \propto h^2 \ , \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{N-1} \ ,$$

die Abhängigkeit $\Delta I(h)$ wird also durch ein Potenzgesetz beschrieben. Um generell zu prüfen, ob für eine Funktion $g(h)$ gilt: $g(h) \propto h^\alpha$, trägt man $\ln(g)$ gegen $\ln(h)$ auf; ein Potenzgesetz zeigt sich in dieser doppel-logarithmischen Auftragung als Gerade. Erstellen Sie (mit Hilfe eines Programms) ein Diagramm, in dem $\ln(\Delta I)$ gegen $\ln(h)$ aufgetragen ist. Wählen Sie dazu die Zahl der Stützstellen im Bereich $N = 10$ bis $N = 10000$. (4 Punkte)

d) Unter der Annahme, dass ein Potenzgesetz vorliegt, lässt sich der Exponent direkt bestimmen, indem man die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}y} \ , \quad \text{mit} \quad y = \ln h$$

bildet. Erweitern Sie das Programm aus Teilaufgabe c) entsprechend und berechnen Sie den Exponenten α. Hinweis: Verwenden Sie dazu den Vorwärtsdifferenzenquotienten. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Integration – Simpson-Regel

(6 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, das das Integral;

$$I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\ , \quad \text{mit} \quad f(x) = 5x^4$$

mit Hilfe der Simpson-Regel berechnet. Hinweis: die Zahl der Stützstellen N muss ungerade sein. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie analog zu Teilaufgabe d) von Aufgabe 1 den Exponenten α für den Fehler ($\Delta I(h) \propto h^\alpha$). (3 Punkte)

Aufgabe 3: Faktorisierung

(7 Punkte)

Mit dem folgenden Algorithmus wird eine ganze Zahl M in zwei Faktoren zerlegt, z.B. $15 \to 3 \cdot 5$; ist die Eingabe eine Primzahl, so ergibt sich z.B. $17 \to 1 \cdot 17$.

Zunächst wird berechnet

- $f_1 = \lfloor\sqrt{M}\rfloor$;
- $f_2 = f_1 + 1$.

Solange $f_1 > 0$ wird der folgende Block ausgeführt

- falls $(f_1 \cdot f_2) = M \longrightarrow$ Faktorisierung gefunden; die while-Schleife wird mit `break` beendet;
- falls $(f_1 \cdot f_2) > M \longrightarrow f_1$ wird um 1 verringert;
- falls $(f_1 \cdot f_2) < M \longrightarrow f_2$ wird um 1 erhöht.

Für $M = 731$ liefert der Algorithmus die folgende Sequenz an Werten für f_1 und f_2:

27 28; 26 28; 26 29; 25 29; 25 30; 24 30; 24 31; 23 31; 23 32; ... 18 39; 18 40; 18 41; 17 41; 17 42; 17 43;

a) Schreiben Sie das entsprechende Programm. (5 Punkte)

b) Zerlegen Sie mit diesem Programm die folgenden Zahlen in Produkte aus zwei ganzen Zahlen: $z_1 = 5047632089$, $z_2 = 29597574011$, $z_3 = 67873310559651$, $z_4 = 1556617449037459651$. (2 Punkte)

Hinweis: Gesucht ist hier nicht die Faktorisierung in alle Primfaktoren, sondern nur in zwei ganze Zahlen, die nicht notwendigerweise Primzahlen sind.