Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

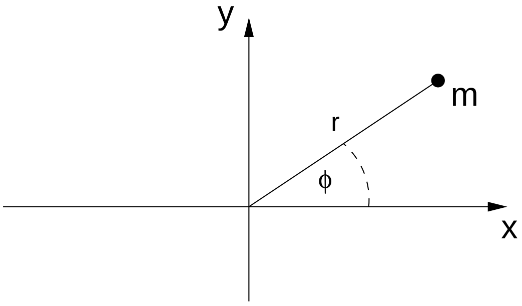
apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2017

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 30.05.2017, 12:00

Aufgabe 1: Ebene Bewegung mit Zentralkraft

(4 Punkte)



Die Lagrange-Funktion für die zweidimensionale Bewegung eines Massenpunkts in einem Zentralpotential $V(r)$ ($r = |\vec{r}|$) mit den generalisierten Koordinaten r und ϕ (siehe Abbildung) lautet

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \ .$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \ , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(mr^2 \dot{\phi} \right) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich diese beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordung der Form

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} + \vec{f}(\vec{u}, t) = 0$$

zurückführen lassen. Hinweis: Die Drehimpulserhaltung vereinfacht die analytische Lösung der Differentialgleichungen (1). Dies soll aber hier nicht ausgenützt werden.

Aufgabe 2: Pendel mit zeitabhängiger Fadenlänge

(6 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für das ebene Pendel mit zeitabhängiger Fadenlänge $l(t)$ lautet

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l(t)} \sin(\varphi(t)) + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\varphi}(t) = 0 \ .$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit dem Euler-Verfahren. Setzen Sie dabei $g = 1$ und für die Fadenlänge

$$l(t) = 1 + a \sin t \ ,$$

mit $a = 0$, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.4. Verwenden Sie als Anfangsbedingungen: $\varphi(t) = 0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0.7$. Erstellen Sie ein Diagramm, in dem die Lösungen für $\varphi(t)$ für diese Werte von a dargestellt sind.

Aufgabe 3: Runge-Kutta-Methode

(8 Punkte)

a) Implementieren Sie die Runge-Kutta-Methode (zweiter Ordnung in Δt) zur Lösung der Differentialgleichung für das ebene Pendel mit konstanter Fadenlänge l. (4 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Abhängigkeit des Winkels $\varphi(t = t_f)$ mit $t_f = 20$ von der Schrittweite Δt für Euler- und Runge-Kutta-Methode. Erstellen Sie dazu ein Diagramm mit $\varphi(t = t_f)$ in Abhängigkeit von $1/\Delta t$. Verwenden Sie die folgenden Parameter:

$$\varphi(t = 0) = 0 \ , \ \dot{\varphi}(t = 0) = 1.9 \ , \ g = 1 \ , \ l = 1 \ .$$

(4 Punkte)