Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2017

Blatt 7: Abgabetermin: Dienstag, der 20.06.2017, 12:00

Aufgabe 1: Diffusionsgleichung – FTCS-Verfahren

(6 Punkte)

Die Diffusionsgleichung in Dimension $d = 1$ lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \ . \tag{1}$$

Die Randbedingungen sind

$$u(x=0,t) = u_{\mathrm{l}} = 0 \ , \quad u(x=L,t) = u_{\mathrm{r}} = 1$$

und die Anfangsbedingung ist gegeben durch:

$$u(x,t=0) = \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{x}{L} \ .$$

Schreiben Sie ein Programm, welches die partielle Differentialgleichung (1) mit Hilfe des FTCS-Verfahrens löst. Verwenden Sie dazu die Parameter $L = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.25(\Delta x)^2$. Das Programm soll einen Plot erstellen mit $u(x, t_n)$ für die Zeiten $t_n = 10^{-3} \cdot 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$ (in *einem* Plot, keine Animation).

Aufgabe 2: Poisson-Gleichung – Relaxationsmethode

(11 Punkte)

Betrachten Sie die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi(x,y) = -4\pi\rho(x,y) \tag{2}$$

für die Ladungsverteilung

$$\rho(x,y) = \begin{cases} e^{-(x-2)^2} e^{-y^2} - e^{-(x+2)^2} e^{-y^2} & : \quad -5 < x < 5 \text{ und } -5 < y < 5 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Phi(-5,y) = \Phi(5,y) = 0 \quad &, \quad -5 < y < 5 \ , \\ \Phi(x,-5) = \Phi(x,5) = 0 \quad &, \quad -5 < x < 5 \ . \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die Ladungsverteilung $\rho(x, y)$ als dreidimensionalen Plot dar. (2 Punkte)

b) Schreiben Sie ein Programm, welches die partielle Differentialgleichung (2) mit Hilfe der Relaxationsmethode löst (mit $\Delta x = \Delta y = 0.2$). Als Startwert für das Potential können Sie $\Phi_{ij}^{(k=0)} = 0$ setzen. Um die Konvergenz zu überprüfen, soll folgendes Maß für den Unterschied zwischen alter und neuer Lösung berechnet werden:

$$f_p(k) = \sum_{ij} |\Phi_{ij}^{(k)} - \Phi_{ij}^{(k-1)}| \ .$$

Dabei ist p der Parameter, mit dem alte und neue Lösung gemischt werden (siehe Vorlesungsskript p27). Berechnen Sie $f_p(k)$ im Bereich $k = 1, \ldots, 2000$ für $p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ und erstellen Sie ein Diagramm mit den Funktionen $f_p(k)$. (7 Punkte)

c) Stellen Sie $\Phi_{ij}^{(k=2000)}$ (das sollte der konvergierten Lösung entsprechen) für $p = 0.5$ als dreidimensionalen Plot dar. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Matrizen

(7 Punkte)

Gegeben sind die folgenden $n \times n$-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & & & \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ n-1 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie ein Programm, welches die Matrizen A und B für beliebige $n > 1$ belegt. Verwenden Sie den Befehl

```
imshow(M, cmap="gray", interpolation="none")
```

um die Belegung beider Matrizen zu veranschaulichen. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Befehls `eigvals(A)` die Eigenwerte der Matrix A und stellen Sie diese im Bereich $n = 2, 3, \ldots, 16$ in einem Diagramm graphisch dar. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Befehls `eigvecs(A)` die Eigenvektoren der Matrix A für $n = 8$ und stellen Sie diese in einem Diagramm graphisch dar. (2 Punkte)