Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2018

Blatt 2: Abgabetermin: Montag, der 30.04.2018, 12:00

Aufgabe 1: Nullstellen - Vorzeichenwechsel

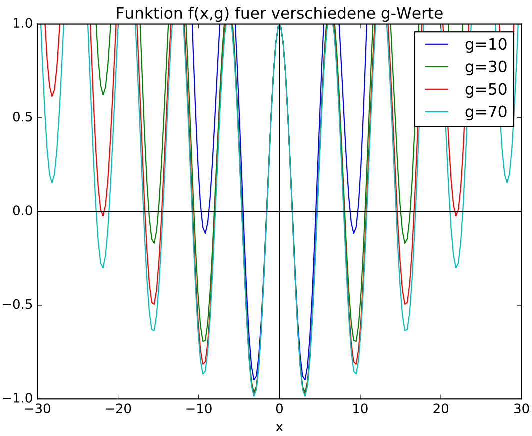
(8 Punkte)

Wir nehmen an, dass die Funktion $f(x)$ im Intervall $]a, b[$ nur einfache Nullstellen x_n hat, und dass für benachbarte Nullstellen gilt: $x_n - x_{n-1} > \Delta$. Dann lässt sich die Zahl der Nullstellen im Intervall $]a, b[$ bestimmen, indem man die Vorzeichenwechsel der Funktion $f(x)$ für die x-Werte $x = a + m\Delta$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ abzählt.

Betrachtet werden die Funktionen

$$f_g(x) = \cos(x) + \frac{1}{g}\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$$

die, wie in der Abbildung dargestellt, eine von g abhängige Zahl an Nullstellen haben.



a) Erstellen Sie zunächst ein Diagramm (wie in der Abbildung) in dem die Funktionen $f_g(x)$ für verschiedenen g-Werte dargestellt sind. (3 Punkte)

b) Erweitern Sie jetzt das folgende Programm so, dass in der Funktion `N_zeros(g)` die Zahl der Nullstellen nach dem oben beschriebenen Verfahren bestimmt wird. (3 Punkte)

```
f(x,g) = cos(x) + ((x/pi)^2)/g
a = -30.0
b = 30.0
Delta = 0.01
Nf = Int(round((b-a)/Delta)) # Zahl der Stuetzstellen

function N_zeros(g)
  nz = 0 # Zahl der Nullstellen
  #
  # Teilaufgabe b)
  #
  return nz
end

g_min = 0.5
g_max = 100.0
Ng = 500

g_values = linspace(g_min,g_max,Ng)
Nz_values = Array{Int64}(Ng)

for i = 1:Ng
  Nz_values[i] = N_zeros(g_values[i])
end

#
# Teilaufgabe c)
#
```

c) Das Programm soll die Zahl der Nullstellen in Abhängigkeit der mit `g_values` definierten g-Werte graphisch darstellen. Ergänzen Sie den entsprechenden Programmteil. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen – Divisionsmethode

(7 Punkte)

Die Divisionsmethode zur Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen beruht auf der Division mit Rest, z.B. 41:2 = 20 Rest 1, oder allgemein $a : b =$ Ganzzahlquotient c Rest r, wobei gilt $a = bc + r$. Ganzzahlquotient und Rest lassen sich in Julia folgendermaßen bestimmen:

- `c = div(a,b)`
- `r = rem(a,b)`

Die Stellen z_1 bis z_n der Dualzahl erhält man, indem man iterativ die Division mit Rest auf c anwendet und $z_i = r$ setzt, wie in folgendem Beispiel veranschaulicht:

- 41:2 = 20 Rest 1 $\Rightarrow z_1 = 1$
- 20:2 = 10 Rest 0 $\Rightarrow z_2 = 0$
- 10:2 = 5 Rest 0 $\Rightarrow z_3 = 0$
- 5:2 = 2 Rest 1 $\Rightarrow z_4 = 1$
- 2:2 = 1 Rest 0 $\Rightarrow z_5 = 0$
- 1:2 = 0 Rest 1 $\Rightarrow z_6 = 1$

Die Dualzahl ergibt sich damit als $[101001]_2 = [41]_{10}$.

a) Schreiben Sie eine Funktion `dec2dual(M)`, die die oben beschriebene Umwandlung mit Hilfe der Divisionsmethode durchführt. (4 Punkte)

b) Schreiben Sie ein Programm, welches mit dieser Funktion die Dualzahlen für die im Feld `M_values = [2,17,41,1024,5555]` angegebenen M-Werte berechnet. Die Ausgabe soll die folgende Form haben: (3 Punkte)

```
2 = [10]_2
17 = [10001]_2
...
```

Aufgabe 3: Darstellung reeller Zahlen als Kettenbruch

(10 Punkte)

Eine reelle Zahl (hier $x > 0$) lässt sich eindeutig als Kettenbruch der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \ , \quad a_n \in \mathbb{N} \ ,$$

darstellen.

a) Schreiben Sie eine Funktion `x2cf(x,N)`, welche die Kettenbruchkoeffizienten a_0 bis a_N von x berechnet. Hinweise:

   - $a_0 = \lfloor x \rfloor$;
   - $(x - a_0)^{-1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}$;
   - $a_1 = \lfloor (x - a_0)^{-1} \rfloor$ etc.;

   (die Ausgabe ist ein Feld der Länge $N + 1$). (4 Punkte)

Aus den Kettenbruchkoeffizienten a_0 bis a_N erhält man einen *endlichen* Kettenbruch der Form:

$$q_N = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_N}}} \ .$$

b) Schreiben Sie eine Funktion `cf2q(cf)`, welche aus den Koeffizienten $\{a_n\}$ den endlichen Kettenbruch q_N berechnet. (4 Punkte)

c) Schreiben Sie ein Programm, das mit Hilfe der beiden Funktionen aus den Teilaufgaben a) und b) die folgende Ausgabe erzeugt (hier für $x = \pi$, $N = 3$): (2 Punkte)

```
Eingabe: x = 3.141592653589793
Kettenbruchkoeffizienten: [3, 7, 15, 1]
q_3 = 3.1415929203539825
relative Abweichung: 8.49136787674061e-8
```