Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2018

Blatt 3: Abgabetermin: Montag, der 07.05.2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Nullstellen - Bisektion

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Verfahren zur Bestimmung der Zahl der Nullstellen (Blatt 2, Aufgabe 1) mit dem Bisektions-Verfahren kombiniert werden. Betrachtet wird wieder die Funktion

$$f_g(x) = \cos(x) + \frac{1}{g}\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$$

die für $g = 10$ im Intervall]-20,20[acht Nullstellen aufweist. Sobald der Algorithmus einen Vorzeichenwechsel gefunden hat, also $f(x_m)f(x_{m+1}) < 0$, wird das Ausgangsintervall für das Bisektions-Verfahren entsprechend gesetzt und mit Hilfe einer Funktion `bisection(xl,xu,N)` die Nullstelle mit $N = 5$ Iterationen des Bisektions-Verfahrens bestimmt.

Erweitern Sie das folgende Programm entsprechend:

```
f(x,g) = cos(x) + ((x/pi)^2)/g
a = -20.0
b = 20.0
Delta = 0.01
Nf = Int(round((b-a)/Delta)) # Zahl der Stuetzstellen

g = 10
N = 5
h(x) = f(x,g)

function bisection(xl,xu,N)
  # ...
end

nz = 0

for j = 0:Nf
  x = a + j*Delta
  if f(x,g)*f(x+Delta,g) < 0
    # ...
  end
end
```

Die Ausgabe soll die folgende Form haben:

```
Nullstelle 1 bei x=-9.71890625
Nullstelle 2 bei x=-8.73859375
...
```

Aufgabe 2: Nullstellen: Newton-Verfahren

(6 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \sin(x) - 0.3 + 0.5x$$

hat genau eine Nullstelle bei $x \approx 0.2$, die in dieser Aufgabe mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmt werden soll. Da jedoch – im Gegensatz zum Bisektions-Verfahren – die Konvergenz des Newton-Verfahrens nicht garantiert ist, soll hier die Nullstelle durch eine Kombination dieser beiden Verfahren bestimmt werden.

Schreiben Sie ein Programm, in dem zunächst das Intervall $[-10, 10]$ mit dem Bisektions-Verfahren auf ein Intervall $[x'_l, x'_u]$ reduziert wird (wählen Sie dafür eine sinnvolle Anzahl an Iterationen), und anschließend der Wert $\bar{x}' = \frac{1}{2}(x'_l + x'_u)$ als Ausgangswert für das Newton-Verfahren verwendet wird.

Aufgabe 3: Differentiation

(8 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, welches den Vorwärts-Differenzenquotienten $f'_\mathrm{V}(x_i)$ der Funktion

$$f(x) = \sin(x^2)$$

im Intervall $[-3, 3]$ (d.h. $x_1 = -3$, $x_N = 3$) für $N_1 = 20$, $N_2 = 50$ und $N_3 = 200$ berechnet. N ist dabei die Zahl der Stützstellen, siehe Vorlesungsskript. Stellen Sie das Ergebnis für diese drei Werte von N in einem Plot graphisch dar. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die mittleren Abweichungen

$$\Delta_\mathrm{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |f'_\mathrm{V}(x_i) - f'(x_i)|$$

für den Vorwärts-Differenzenquotienten sowie

$$\Delta_\mathrm{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |f'_\mathrm{Z}(x_i) - f'(x_i)|$$

für den zentralen Differenzenquotienten, jeweils für $N = 100$. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Kettenbruchmethode – rationale Näherungen der Zahl π

(5 Punkte)

Mit Hilfe der Kettenbruchmethode (siehe Blatt 2, Aufgabe 3) lässt sich eine Sequenz rationaler Näherungen q_i einer reellen Zahl x bestimmen, also

$$q_0 = a_0 \ , \quad q_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \ , q_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \ , \ldots$$

Erweitern Sie das Programm aus Blatt 2, Aufgabe 3 so, dass die rationalen Näherungen q_0 bis q_5 der Zahl π berechnet und als rationale Zahlen in folgender Form ausgegeben werden:

```
q_0 = 3
q_1 = 22//7
...
```

Hinweis: In der Programmiersprache Julia lassen sich rationale Zahlen folgendermaßen darstellen: `1//3, 1//(1+1//5)`, etc.