Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

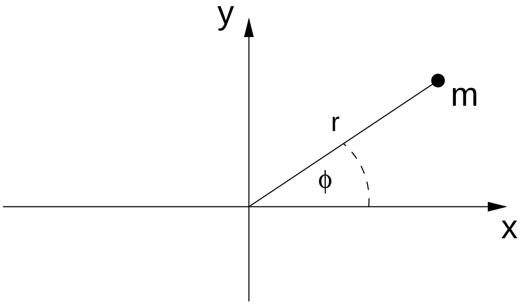
apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2018

Blatt 5: Abgabetermin: Montag, der 28.05.2018, 12:00

Aufgabe 1: Ebene Bewegung mit Zentralkraft

(4 Punkte)



Die Lagrange-Funktion für die zweidimensionale Bewegung eines Massenpunkts in einem Zentralpotential $V(r)$ $(r = |\vec{r}|)$ mit den generalisierten Koordinaten r und ϕ (siehe Abbildung) lautet

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \ .$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \ , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(mr^2 \dot{\phi} \right) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich diese beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordung der Form

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{u}, t)$$

zurückführen lassen. Hinweis: Die Drehimpulserhaltung vereinfacht die analytische Lösung der Differentialgleichungen (1). Dies soll aber hier nicht ausgenützt werden.

Aufgabe 2: Pendel mit zeitabhängiger Fadenlänge

(6 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für das ebene Pendel mit zeitabhängiger Fadenlänge $l(t)$ lautet

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l(t)} \sin(\varphi(t)) + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\varphi}(t) = 0 \; .$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit dem Euler-Verfahren. Setzen Sie dabei $g = 1$ und für die Fadenlänge

$$l(t) = 1 + a \sin(2t) \; ,$$

mit $a = 0$, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.4. Verwenden Sie als Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0.7$. Erstellen Sie ein Diagramm, in dem die Lösungen für $\varphi(t)$ für diese Werte von a und $0 \leq t \leq 10$ dargestellt sind. Setzen Sie Δt im Euler-Verfahren $= 0.01$.

Aufgabe 3: Runge-Kutta-Methode

(7 Punkte)

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

hat für die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ die Lösung

$$x(t) = \cos(t) \; ,$$

insbesondere gilt für $T_{\max} = 10\pi$: $x(T_{\max}) = 1$. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie genau dieser Wert mit dem Euler- bzw. Runge-Kutta-Verfahren erreicht wird.

a) Schreiben Sie ein Programm, welches die Lösungen $x(t)$ mit Hilfe des Euler-Verfahrens für folgende N-Werte berechnet (N: Zahl der Zeitschritte): $N =$ 250, 1000, 4000. Erstellen Sie ein Diagramm mit den resultierenden $x(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T_{\max}$. Ausgegeben werden soll außerdem $x(T_{\max})$ für diese N-Werte. (3 Punkte)

b) Schreiben Sie ein Programm, welches für $N = 500$ die Lösung $x(t)$ mit dem Euler-Verfahren sowie mit den Runge-Kutta-Verfahren zweiter und vierter Ordnung berechnet. Erstellen Sie ein Diagramm mit den resultierenden $x(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T_{\max}$. (4 Punkte)