Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

apl. Prof. Dr. R. Bulla

SS 2018

Blatt 7: Abgabetermin: Montag, der 11.06.2018, 12:00

Aufgabe 1: Diffusionsgleichung – FTCS-Verfahren

(6 Punkte)

Die Diffusionsgleichung in Dimension $d = 1$ lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \ . \tag{1}$$

Die Randbedingungen sind:

$$u(x=0,t) = u_l = 0 \ , \quad u(x=L,t) = u_r = 1 \ ,$$

und die Anfangsbedingung ist gegeben durch:

$$u(x,t=0) = \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{x}{L} \ .$$

Schreiben Sie ein Programm, welches die partielle Differentialgleichung (1) mit Hilfe des FTCS-Verfahrens löst. Verwenden Sie dazu die Parameter

- $L = 1$,
- $N = 50$ (Definition siehe Vorlesungsskript),
- $\Delta t = 10^{-4}$.

Daraus folgt:

- $\Delta x = L/N = 0.02$,
- $\Delta t/(\Delta x)^2 = 0.25$.

Das Programm soll einen Plot erstellen mit $u(x, t_n)$ für die Zeitschritte $t_n = n\Delta t$ mit $n = 10j^2$, $j = 1, 2, \ldots, 5$ (in *einem* Plot, keine Animation).

Aufgabe 2: Poisson-Gleichung – Relaxationsmethode

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x,y) = -4\pi\rho(x,y) \tag{2}$$

mit Hilfe der Relaxationsmethode gelöst werden. Die Ladungsverteilung $\rho(x,y)$ und das Potential $\Phi(x,y)$ sind auf einem zweidimensionalen Netz mit $x_0 = -5$, $x_N = 5$, $y_0 = -5$ und $y_N = 5$ mit $N = 50$ definiert.

Für die Ladungsverteilung gilt:

$$\rho(x,y) = e^{-(x-2)^2}e^{-y^2} - e^{-(x+2)^2}e^{-y^2} \ .$$

a) Belegen Sie das zweidimensionale Feld `rho = Array{Float64}(N-1,N-1)` mit den Funktionswerten $\rho(x_i, y_j)$ mit

$$x_i = -5 + i\Delta x \ , \quad y_j = -5 + j\Delta x \ , \quad i,j = 1,\ldots,N-1 \ ,$$

und stellen Sie das Feld `rho` mit Hilfe von `imshow` graphisch dar. (2 Punkte)

Die Randbedingungen für das Potential sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Phi(-5,y) = \Phi(5,y) = 0 \quad &, \quad -5 < y < 5 \ , \\ \Phi(x,-5) = \Phi(x,5) = 0 \quad &, \quad -5 < x < 5 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

b) Schreiben Sie ein Programm, welches die partielle Differentialgleichung (2) unter den Randbedingungen (3) mit Hilfe der Relaxationsmethode löst.
Hinweise:

   – Setzen Sie als Startwert für das Potential $\Phi_{ij}^{(k=0)} = 0$.

   – Der Parameter p (siehe Vorlesungsskript) kann $= 1$ gesetzt werden.

   Erstellen Sie ein Diagramm, in dem für die Iterationen $k_n = 100n$, $(n = 1,\ldots,10)$ das Potential $\Phi(x, y = 0)$ in Abhängigkeit von x dargestellt wird.
   (6 Punkte)

c) Stellen Sie das Potential $\Phi_{ij}^{(k)}$ für $k = 1000$ mit Hilfe von `imshow` graphisch dar. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Matrizen

(7 Punkte)

Gegeben ist die $N \times N$-Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

also eine Tridiagonalmatrix mit $M_{ii} = a\delta_{i1}$ und $M_{i,i+1} = 1$, $M_{i+1,i} = 1$ für $i = 1, \ldots, N-1$.

a) Schreiben Sie eine Funktion `M_fill(N,a)`, welche die Matrix M für beliebige N und $a \in \mathbb{R}$ belegt. Veranschaulichen Sie die Belegung der Matrix für $a = 0.5$ mit Hilfe von `imshow`. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie mit `eigvals(...)` das Spektrum der Eigenwerte von M. Stellen Sie die Abhängigkeit dieses Spektrums vom Parameter a im Bereich $-3 \leq a \leq 3$ für $N = 8$ graphisch dar. (4 Punkte)