Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 10.05.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Der Operator $\vec{\nabla}_i$

Die Kraft auf das Teilchen i in einem N-Teilchen-System mit der gesamten potentiellen Energie $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \ .$$

Dabei wird der Gradient bzgl. der Koordinaten des Teilchens i gebildet, d.h. der Operator $\vec{\nabla}_i$ ist gegeben durch

$$\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie:

a)

$$\vec{\nabla}_i \times \vec{A}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \ \ \text{mit} \ \ \vec{A}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{j=1}^{N} f(|\vec{r}_j|)\vec{r}_j$$

b)

$$\vec{\nabla}_i \left[\sum_{j=0}^{N-1} f(|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|) \right] \quad (i = 1, \ldots, N-1)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Zeitverbrauch bei eindimensionaler Bewegung

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Zeit Δt, die ein Teilchen für die eindimensionale Bewegung im Potential $V(x)$ von x_1 nach x_2 braucht, gegeben ist durch

$$\Delta t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \mathrm{d}x \ .$$

Das Potential sei jetzt repulsiv, mit $V(x) = -k|x|^\alpha$, $\alpha > 0$ und $k > 0$. Die Energie des Teilchens sei $E = 0$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $x = x_1 > 0$. Für welche Werte von α ist die Zeit, die das Teilchen zum Erreichen der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ braucht, endlich? (3 Punkte)

Aufgabe 3: Phasenraumdarstellung

a) Berechnen Sie für den eindimensionalen harmonischen Oszillator den Flächeninhalt des Gebiets im Phasenraum, welches durch die Menge aller Zustände mit Gesamtenergie $E < E_0$ gegeben ist.

b) Betrachten Sie jetzt den eindimensionalen anharmonischen Oszillator, d.h. ein Teilchen der Masse m im Potential $V(x) = \alpha x^4$. Geben Sie die Schnittpunkte der Trajektorien mit der x- und p-Achse an und skizzieren Sie das Phasenraumporträt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Diagonalisierung von Matrizen

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M. Hinweis: bei entarteten Eigenwerten sind orthonormierte Eigenvektoren im entsprechenden Unterraum zu wählen.

b) Konstruieren Sie aus den orthonormierten Eigenvektoren die Transformationsmatrix S und berechnen Sie das Matrixprodukt $S^{\mathrm{t}} M S$.

(4 Punkte)