Übungsaufgaben zur Vorlesung

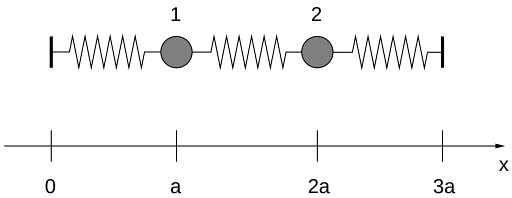
Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 7: Abgabetermin: Dienstag, der 24.05.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Zwei gekoppelte Oszillatoren



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensionale System aus 2 Körpern (jeweils mit Masse m), die über Federn (jeweils mit Federkonstante k) untereinander und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = 3a$ verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ ($n = 1, 2$) und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

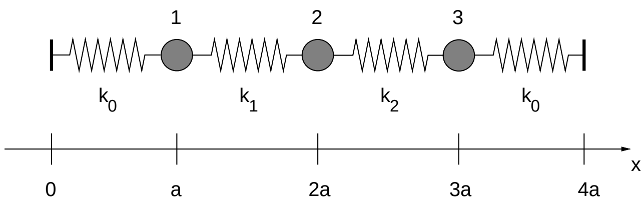
Berechnen Sie die Bahnen der beiden Körper, also $x_1(t)$ und $x_2(t)$, für die Anfangsbedingungen

$$x_1(t = 0) = \frac{3}{2}a \quad , \quad x_2(t = 0) = 2a \quad , \quad \dot{x}_1(t = 0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_2(t = 0) = 0 \ .$$

Hinweis: Ausgangspunkt ist die in der Vorlesung angegebene allgemeine Lösung für die (physikalischen) Auslenkungen $\mathrm{Re}(\vec{\xi}(t))$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Drei gekoppelte Oszillatoren



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte System aus drei Körpern, jeweils mit Masse m, die über Federn untereinander (mit Federkonstanten k_1, k_2) und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = 4a$ (mit Federkonstante k_0) verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ ($n = 1, 2, 3$) und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Geben Sie die gesamte potentielle Energie dieses Systems an.

b) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen ξ_n?

c) Schreiben Sie diese Bewegungsgleichungen in der Form

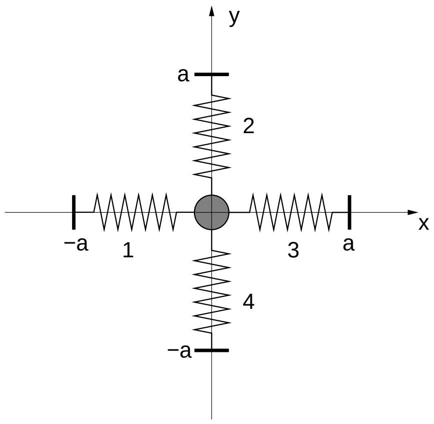
$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{\xi} = M\vec{\xi}\ ,$$

und geben Sie die Matrix M an. Hinweis: Im Unterschied zur Notation in der Vorlesung enthält hier die Matrix M die Federkonstanten.

d) Reduzieren Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für $\vec{\xi}$ die Bewegungsgleichung auf ein Eigenwertproblem.

(6 Punkte)

Aufgabe 3: zweidimensionaler Oszillator



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte zweidimensionale System aus einem Teilchen der Masse m und vier Federn jeweils mit Federkonstante k. Die Aufhängepunkte der Federn sind gegeben durch $\vec{a}_i = (\pm a, 0)$ und $(0, \pm a)$ $(i = 1, \ldots, 4)$, der Ort des Teilchens ist $\vec{r} = (x, y)$, mit $\vec{r} = (0, 0)$ einer Ruhelage des Systems. Die Beiträge der einzelnen Federn zur potentiellen Energie sind

$$V_i(x, y) = \frac{1}{2}k(l_i(x, y) - a)^2\ ,$$

mit $l_i(x, y)$ der Länge der Feder i.

a) Geben Sie die gesamte potentielle Energie V des Systems als Funktion von x und y an.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ und geben Sie die Taylor-Entwicklung von $V(x, y)$ bis zur quadratischen Ordnung an.

(6 Punkte)