Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 8: Abgabetermin: Dienstag, der 07.06.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: harmonische Kette: Randbedingungen

Die harmonische Kette aus N gekoppelten Teilchen der Masse m kann mit verschiedenen Randbedingungen definiert werden. Diese Randbedingungen zeigen sich nicht nur in den Randtermen der potentiellen Energie, sondern verlangen auch unterschiedliche Strategien zur Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems.

a) Wie lautet die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ — und damit die Matrix M mit $V^{(2)} = -kM$ — für offene und periodische Randbedingungen?

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ansatz $a_n = a \sin(qn)$ auf eine Lösung des Eigenwertproblems für den Fall fester Randbedingungen führt. Ist dieser Ansatz auch eine Lösung für den Fall offener Randbedingungen?

c) Betrachten Sie jetzt den Fall periodischer Randbedingungen. Zeigen Sie, dass der Ansatz
$$a_n = ae^{iqn} ,$$
das Eigenwertproblem löst. Vergleichen Sie das Spektrum der Eigenwerte mit dem Spektrum für feste Randbedingungen.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: Eigenschwingungen der harmonischen Kette

Betrachten Sie jetzt die harmonische Kette mit $N = 3$ Teilchen und festen Randbedingungen. Geben Sie die Eigenwerte, die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren an (als Resultat des Ansatzes $a_n = a \sin(qn)$) und zeigen Sie, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen.

(3 Punkte)

Aufgabe 3: partielle Differentialgleichung: Separation der Variablen

Gegeben seien folgende partielle Differentialgleichungen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + y\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & = & 0 \ , \\
\text{(II)} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z} + z\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} & = & 0 \ .
\end{array}
$$

Führen Sie mit Hilfe eines jeweils geeigneten Ansatzes eine Separation der Variablen durch. Auf welche gewöhnlichen Differentialgleichungen führt diese Separation jeweils?

(4 Punkte)

Aufgabe 4: zweidimensionale Wellengleichung

Die zweidimensionale Wellengleichung hat die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,y,t) \ . \tag{1}$$

Lösen Sie diese partielle Differentialgleichung für die Funktion $\psi(x,y,t)$ mit Hilfe der Separation der Variablen. Die (x,y)-Werte sind dabei auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ und $0 \leq y \leq L$ eingeschränkt, und die Randbedingungen sind gegeben durch

$$
\begin{array}{rcl}
\psi(x=0,y,t) & = & \psi(x=L,y,t) = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq L \ , t \in \mathbb{R} \ , \\
\psi(x,y=0,t) & = & \psi(x,y=L,t) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L \ , t \in \mathbb{R} \ .
\end{array}
$$

Wie lautet die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (1), die diese Randbedingungen erfüllt?

(4 Punkte)