Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 6: Abgabetermin: Dienstag, der 11.06.2013, 10:00

Aufgabe 1: Isotroper harmonischer Oszillator

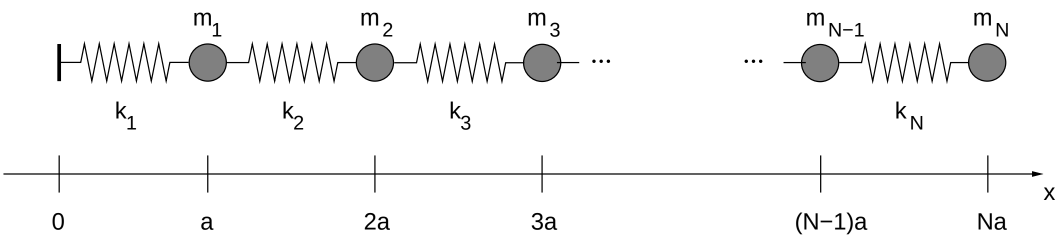
Betrachten Sie den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Potential

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} k r^2 \ .$$

Geben Sie die Eigenschwingungen dieses Systems an.

(2 Punkte)

Aufgabe 2: gekoppelte Oszillatoren



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte System aus N Körpern mit Massen m_n, die über Federn untereinander (mit Federkonstanten $k_2, \ldots, k_N$) und mit dem Aufhängepunkt bei $x = 0$ (mit Federkonstante k_1) verbunden sind. (D.h. feste Randbedingungen am linken Ende und offene Randbedingungen am rechten Ende der Kette.) Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Geben Sie die gesamte potentielle Energie dieses Systems an. (1 Punkt)

b) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen ξ_n? (1 Punkt)

c) Setzen Sie im folgenden $m_n = m$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe b) in der Form

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{\xi} = M \vec{\xi} \ ,$$

und geben Sie die Matrix M an. Hinweis: Im Unterschied zur Notation in der Vorlesung enthält hier die Matrix M die Federkonstanten. (2 Punkte)

Aufgabe 3: potentielle Energie, Taylor-Entwicklung

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem dreidimensionalen Potential der Form

$$V(x_1, x_2, x_3) = -\cos(2x_1) - 2\cos(3x_2) - 2\cos(x_3) + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \; .$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ einer Ruhelage des Systems entspricht. (1 Punkt)

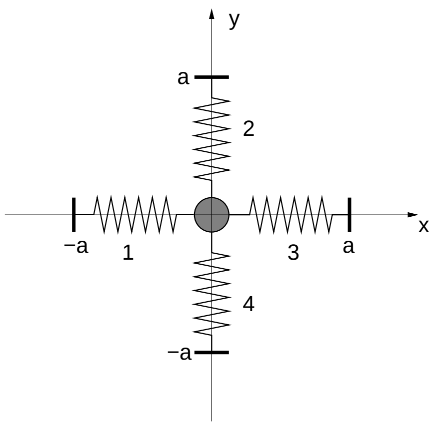
b) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der potentiellen Energie $V(x_1, x_2, x_3)$ um $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ bis zur zweiten Ordnung an. Wie lautet also die Hesse-Matrix

$$V_{ij}^{(2)} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}_0} \; ?$$

(2 Punkte)

c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten x_1, x_2 und x_3 des Teilchens im Rahmen der Näherung aus Teilaufgabe b)? (1 Punkt)

Aufgabe 4: zweidimensionaler Oszillator



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte zweidimensionale System aus einem Teilchen der Masse m und vier Federn jeweils mit Federkonstante k. Die Aufhängepunkte der Federn sind gegeben durch $\vec{a}_i = (\pm a, 0)$ und $(0, \pm a)$ ($i = 1, \ldots, 4$), der Ort des Teilchens ist $\vec{r} = (x, y)$, mit $\vec{r} = (0,0)$ einer Ruhelage des Systems. Die Beiträge der einzelnen Federn zur potentiellen Energie sind

$$V_i(x, y) = \frac{1}{2} k (l_i(x, y) - a)^2 \; ,$$

mit $l_i(x, y)$ der Länge der Feder i.

a) Geben Sie die gesamte potentielle Energie V des Systems als Funktion von x und y an.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ und geben Sie die Taylor-Entwicklung von $V(x, y)$ bis zur quadratischen Ordnung an.

(5 Punkte)