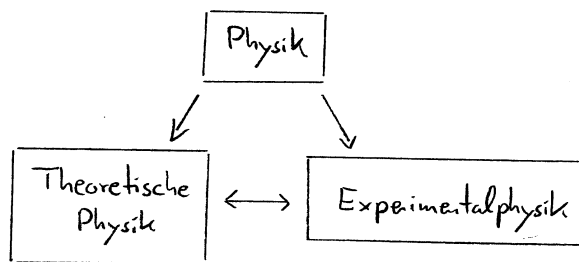


Klassische Theoretische Physik I

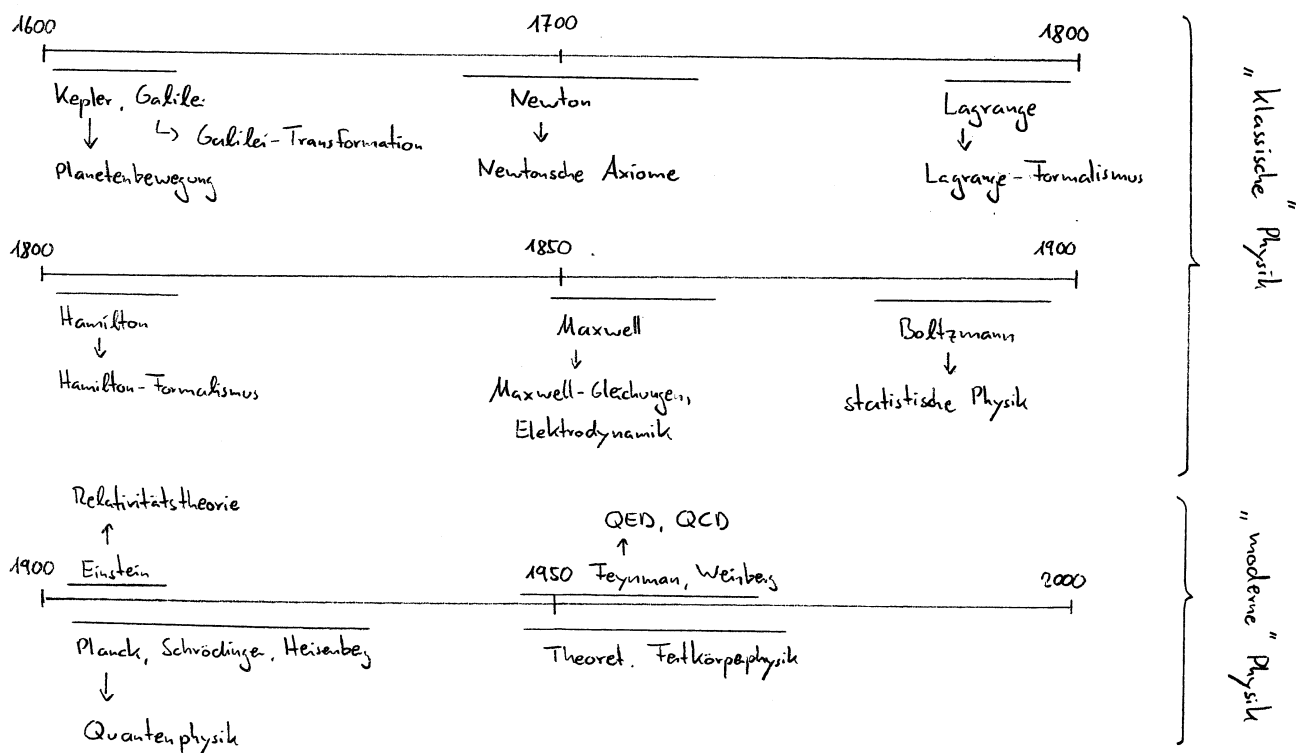
was ist theoretische Physik?



- sucht nach Zusammenhang / Verknüpfung verschiedene Naturerscheinungen
- Erklärung von Experimenten durch Zurückführung auf einfache Prinzipien
 ⇒ Konstruktion einer (mathematisch formulierten) „Theorie“
- mathematische Berechnung der Vorhersagen der Theorie

Struktur der theoretischen Physik

Zeittafel:



Klassische Physik:

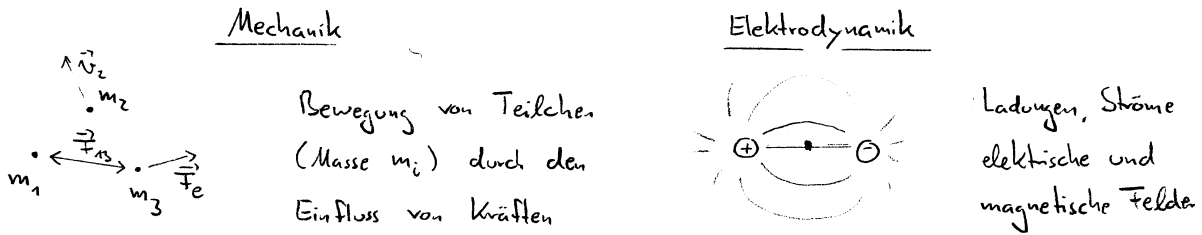
- (Klassische) Mechanik
 - Elektrodynamik
 - Thermodynamik / statistische Mechanik
- ↓
- BA - P: 5. Sem.

Klassische Theoretische Physik I und II

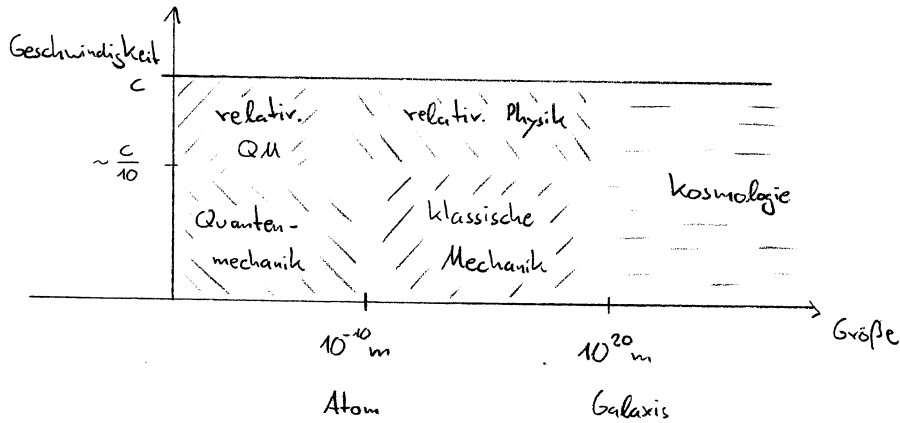
BA - P: 2. 3. Sem

- moderne Physik : - Quantenphysik BA-P : 4. Sem.
 - Relativitätstheorie
 - Quantenfeldtheorie } Master
 - Theoretische Festkörperphysik

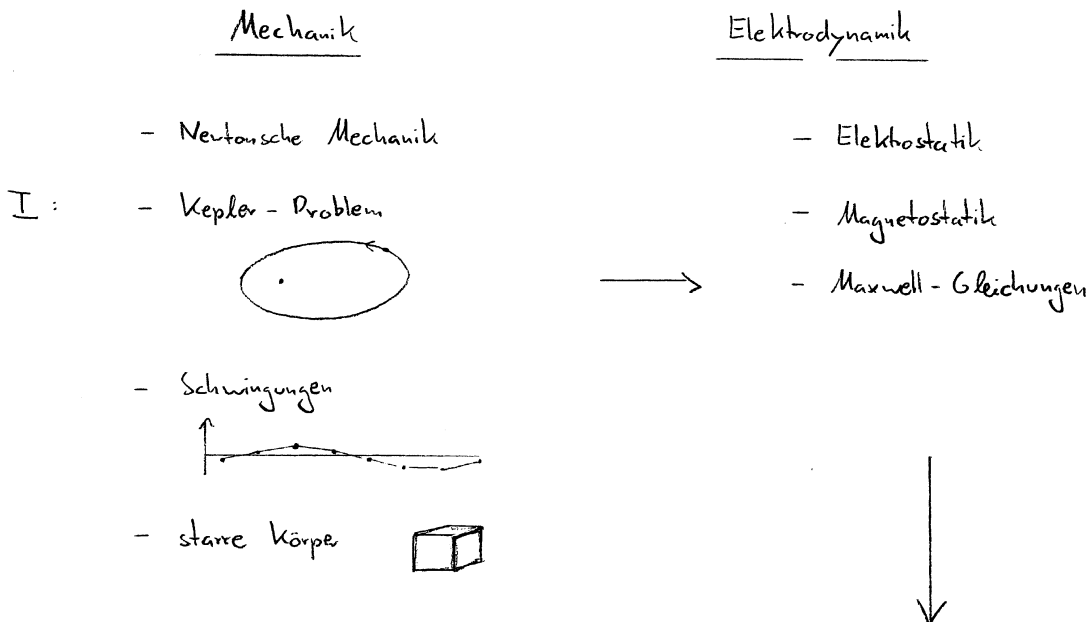
thematische Unterteilung:



Abgrenzung der Mechanik:



Struktur der Vorlesungen Klassische Theoretische Physik I und II

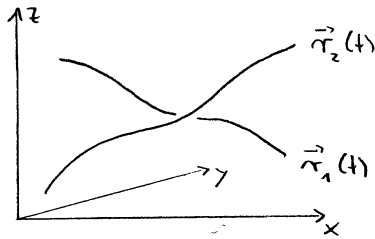


A. Klassische Mechanik

a1

A.1 Grundlagen der Newtonschen Mechanik

Kinematik von Massenpunkten \rightarrow Beschreibung der Bewegung von punktförmigen Körpern (Massen m_i) relativ zu einem Bezugssystem



dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem (KS)

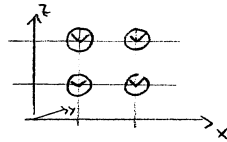
$$\vec{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \quad \vec{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$$

\hookrightarrow Ort des i -ten Teilchens zur Zeit t

Annahmen:

- der gesamte Raum lässt sich durch ein solches KS beschreiben
- die Zeit t ist ein global definierter Parameter

\rightarrow Synchronisation von Uhren im gesamten Raum möglich



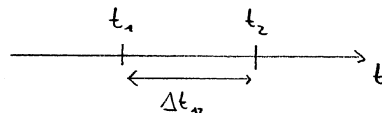
\rightarrow es gibt einen absoluten Gleichzeitkeitsbegriff

(existiert nicht mehr in der Relativitätstheorie!)

Ereignisse: Raum-Zeit Punkte $(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

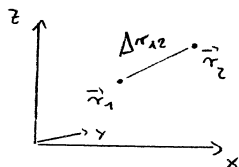
Abstand zweier Ereignisse $E_1: (\vec{r}_1, t_1)$ und $E_2: (\vec{r}_2, t_2)$

a, zeitliche Abstand



$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1$$

b, räumliche Abstand



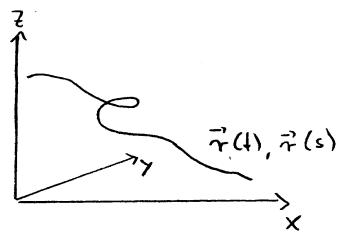
$$\Delta r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

$\vec{r}(t) \rightarrow$ Raumkurven, siehe Vorlesung Math. Methoden (MM)
Kap. VI.1 vektorwertige Funktion

Zu beachten: $\vec{r}(t)$: Beschreibung der Bahn eines Körpers

$\vec{r}(s)$: Beschreibung einer Kurve im Raum

\downarrow
Bogenlänge

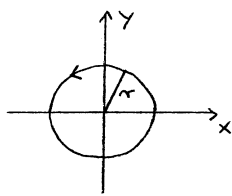


Ableitung von $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{pmatrix} = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \cdot \text{Geschwindigkeit}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{a}(t)$$

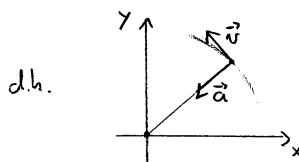
Beispiel: Kreisbahn



$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \omega^2 r \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$



die Newtonschen Axiome

Newton 1686/7 - Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

1. Axiom (Lex prima, Trägheitsgesetz)

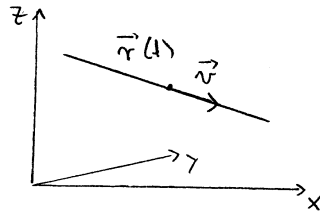
Für die Bahn eines Körpers gilt: $\vec{v} = \text{const}$ (gleichförmige Bewegung)

wenn keine Kräfte auf ihn wirken

Achtung: dies impliziert die Wahl eines geeigneten Bezugssystems, so dass

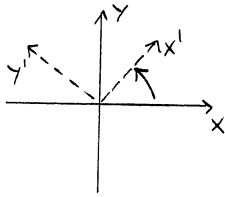
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}$$



→ sog. Inertialsysteme : def. als Bezugssysteme, in denen ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, sich gleichförmig bewegt.

Gegenbeispiel:



ein rotierendes Bezugssystem ist kein Inertialsystem

2. Axiom (Lex secunda, Bewegungsgesetz)

beschreibt die Änderung der Bewegung aufgrund der Einwirkung von Kräften

Def.: Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$ m : träge Masse

das 2. Axiom lautet: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ \vec{F} : Gesamtkraft, die auf das Teilchen einwirkt

für $m = \text{const.}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \vec{a}$ (*)

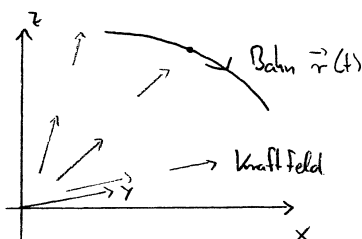
Kraft = Masse · Beschleunigung

speziell für $\vec{F} = 0$:

$(m \neq 0) \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \vec{v} = \text{const.}$ d.h. das 1. Axiom ist als Spezialfall im 2. Axiom enthalten

die Gl. (*) entspricht die Bewegungsgleichung für die Bahn eines Körpers im

Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, t)$

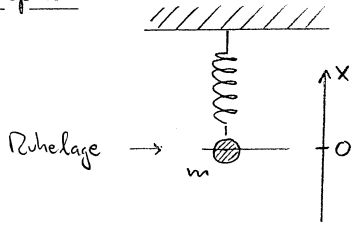


$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Differentialgleichung 2. Ordnung für $\vec{r}(t)$

→ die Bahn $\vec{r}(t)$ ist vollständig determiniert durch die Anfangswerte $\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$

Beispiel:



Körper (Masse m) an eine Feder

betrachte nur eindimensionale Bewegung

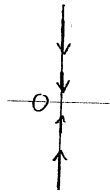
$$\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}(t) = f(x)$$

Hooke'sches Gesetz: $f(x) = -kx$

k: Federkonstante

Kraftfeld:



gilt nur für kleine Auslenkungen

Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$

allgemeine Lösung: $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

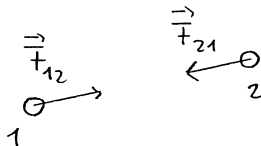
Hinweis: 2. Axiom definiert Kraft und Masse nicht separat

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

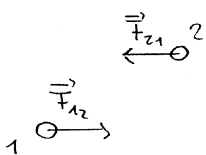
3. Axiom (Lex tertia, Gegenwirkungsprinzip, actio = reactio)

\vec{F}_{ij} : Kraft, die der Körper j auf den Körper i ausübt

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}} \quad (*)$$



aber:



erfüllt (*) erzeugt jedoch Drehmoment

⇒ Zusatz zum 3. Axiom:

Kräfte zwischen zwei Massenpunkten wirken stets in Richtung der Verbindungslinie, d.h.

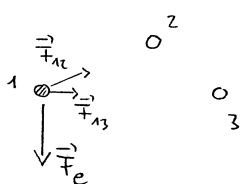
$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

betrachte System aus zwei Körpern, es wirken nur die internen Kräfte \vec{F}_{12} und \vec{F}_{21}

$$\begin{aligned} \rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}}_1(t) & \stackrel{2.A.}{=} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2(t) & \stackrel{2.A.}{=} \vec{F}_{21}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \stackrel{3.A.}{=} -\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\vec{r}}_2(t) \quad \text{d.h.: Verhältnis der Beschleunigungen = (-1) \cdot Verhältnis der trägen Massen}$$

Zusatz: Superpositionsprinzip



Kräfte addieren sich wie Vektoren

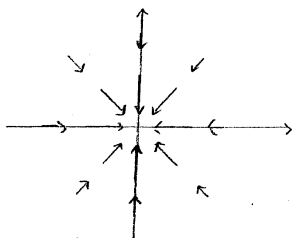
$$\text{z.B.: } \vec{F}_i = \vec{F}_e + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Kräfte:

Körper befindet sich in einem Kraftfeld

$$a) \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

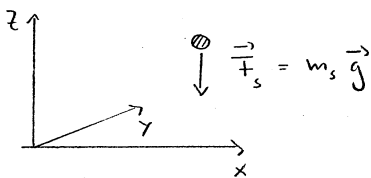
z.B.:



b) geschwindigkeitsabhängige Kräfte

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

1. Gewichtskraft / Schwerkraft



↳ bei dieser Wahl des KS:

m_s = schwere Masse

Kraftfeld = Schwerefeld der Erde

~ const. nahe der Erdoberfläche & kleine $\Delta x, \Delta y$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Erdbeschleunigung

Bewegungsgleichung: $\vec{F}_s = m_t \vec{a}$

$$m_s \vec{g} = m_t \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a = -\frac{m_s}{m_t} g$$

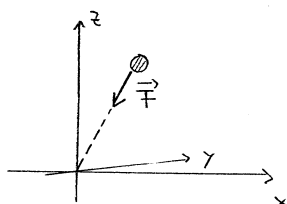
es gilt : - Beschleunigung für alle Körper im Schwerfeld gleich

$$\Rightarrow m_s = \text{const.} \cdot m_t ; \text{ setze const.} = 1$$

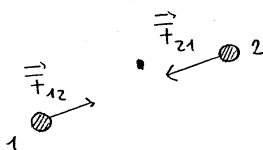
- Einsteins Äquivalenzprinzip :

m_s und m_t prinzipiell gleichwertig \rightarrow Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie

2. Zentralkräfte



oder



$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

in beiden Fällen: $f > 0$ abstoßende Kraft

$f < 0$ anziehende Kraft

Beispiele : - Gravitationskraft : $f(r) = -G m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$

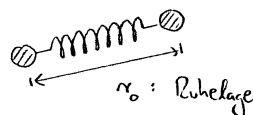
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{schwere Massen!}}$$

- Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen q_1, q_2 :

$$f(r) = q_1 q_2 \frac{1}{r^2} \quad (\text{Gauss'sche Einheiten})$$

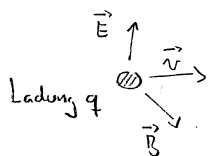
- Hooke'sches Gesetz :

$$f(r) = -k (r - r_0)$$



jetzt : geschwindigkeitsabhängige Kräfte

3. Lorentz-Kraft

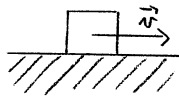


$$\vec{F} = q (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

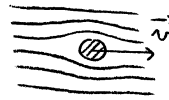
\vec{E} : elektrisches Feld

\vec{B} : magnetisches Feld

4. Reibungskräfte



trockene Reibung



fluide Reibung

$$\vec{F}_{\text{Stokes}} = -\gamma \vec{v}$$

Galilei - Invarianz

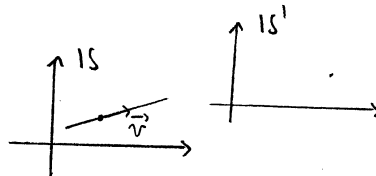
gesucht : allgemeine Transformation $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$, so dass IS' ebenfalls ein Inertialsystem ist
 ↓ ↓
 Koordinaten in IS in IS'

zu zeigen : aus $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t$: gleichförmige Bewegung in IS

folgt $\vec{r}'(t') = \vec{r}'(0) + \vec{v}'t'$: " " in IS'

(i) räumliche und zeitliche Translationen

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0, t' = t + t_0$$



setze für \vec{v} gleichförmige Bewegung in IS ein :

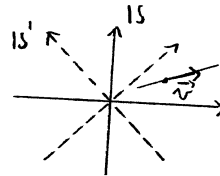
$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}(0) + \vec{v}t + \vec{r}_0 = \vec{r}(0) + \vec{r}_0 + \vec{v}(t' - t_0) = \\ &= \underbrace{\vec{r}(0) + \vec{r}_0 - \vec{v}t_0}_{= \vec{r}'(0)} + \vec{v}t' \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} \end{aligned}$$

d.h. IS' ebenfalls ein Inertialsystem

(ii) räumliche Drehungen

$$\vec{r}' = \hat{D} \vec{r}$$

\hat{D} : Drehmatrix

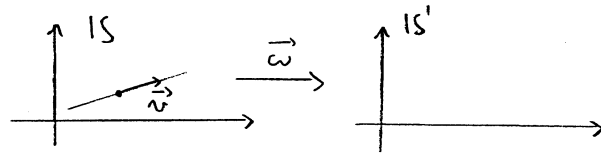


es gilt $\hat{D} \hat{D}^+ = \mathbb{1}$ (siehe Skript MM, Kap. II.2)

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \hat{D} (\vec{r}(0) + \vec{v}t) = \underbrace{\hat{D} \vec{r}(0)}_{= \vec{r}'(0)} + \underbrace{\hat{D} \vec{v}t}_{= \vec{v}'t \rightarrow \text{gedrehter Geschwindigkeitsvektor}} \\ &= \vec{r}'(0) + \vec{v}'t' \quad \text{mit} \quad \boxed{t' = t} \end{aligned}$$

(iii) (spezielle) Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{\omega} t \\ t' &= t \end{aligned}$$



IS' bewegt sich relativ zu IS mit Konst. Geschw. $\vec{\omega}$

$$\vec{r}' = \vec{r}(0) + \vec{v} t - \vec{\omega} t = \underbrace{\vec{r}(0)}_{= \vec{r}'(0)} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{\omega})}_{= \vec{v}'} t = t'$$

aus (i), (ii) und (iii) folgt schließlich: die allgemeinste Transformation, die ein IS in IS' überführt

$$\rightarrow \hat{G}: (\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t') = (\hat{O} \vec{r} + \vec{r}_0 - \vec{\omega} t, t + t_0)$$

die \hat{G} bilden zusammen die Galilei-Gruppe

$$\hat{G} = \hat{G}[\hat{O}, \vec{r}_0, \vec{\omega}, t_0] \text{ festgelegt durch: } \hat{O} \rightarrow 3 \text{ Parameter (Winkel)}$$

$$\vec{r}_0 \rightarrow 3 \text{ -- " --}$$

$$\vec{\omega} \rightarrow 3 \text{ -- " --}$$

$$t_0 \rightarrow 1 \text{ -- " --}$$

zusammen: 10 reelle Parameter

Galilei'sches Relativitätsprinzip

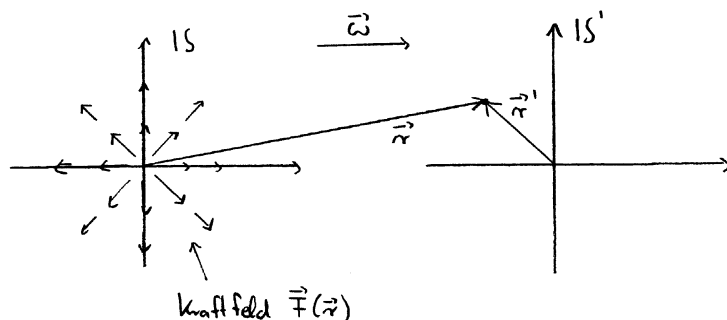
Die Newton'schen Gesetze sind unter Galilei-Transformationen invariant

1. Axiom: ok, siehe (i) - (iii) oben

2. Axiom: was bedeutet "invariant"? \rightarrow das physikalische Gesetz hat in IS und IS' dieselbe Form

$$\text{also: } m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}, t) \text{ in IS } \rightarrow m \frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}'(t') = \vec{F}'(\vec{r}', t') \text{ in IS'}$$

Beweis für: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\omega} t$
 $t' = t$



für das Kraftfeld in S' gilt:

$$\vec{F}'(\vec{r}', t') = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{und damit:} \quad \vec{F}'(\vec{r}', t') = \vec{F}(\vec{r}' + \vec{\omega}t', t')$$

für die Newton'sche Bewegungsgleichung folgt damit:

$$\text{in } S' \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}'(t) + \vec{\omega}t) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'(t) \stackrel{t'=t}{=} m \frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}'(t') \\ \parallel \\ \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}'(\vec{r}', t') \end{array} \right\} \text{ in } S' \quad \text{ok.}$$

A.2 Erhaltungssätze

eine physikalische Größe A ist eine Erhaltungsgröße, wenn $A(t) = \text{const}$, d.h. $\frac{dA}{dt} = 0$

a) Impulserhaltung

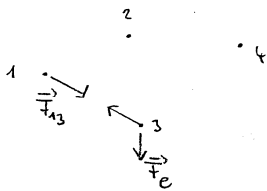
- für ein einzelnes Teilchen: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (2. Axiom)

Impuls ist erhalten, falls $\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ (1. Axiom)

- für ein System aus N Teilchen

an den Orten $\vec{r}_i(t)$, $i=1, \dots, N$

mit den Massen m_i



es wirken: innere Kräfte \vec{F}_{ij}

äußere Kräfte \vec{F}_e

\Rightarrow Bewegungsgleichung für Teilchen i :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad \text{mit der Gesamtkraft} \quad \vec{F}_i = \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$$

Def.: Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ mit der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Schwerpunktimpuls: $\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{Gesamtimpuls}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}}_{=0 \text{ (siehe Übungen)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i)}$$

d.h. Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt
(Masse M , Ort \vec{r}) unter dem Einfluss der Kraft

$$\vec{F}_{e, \text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i) \quad \left(\text{i.A.} \neq N \vec{F}_e(\vec{r}) \right)$$

für $\vec{F}_e = 0$ folgt damit:

↳ Schwerpunktsatz

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0 \quad \text{d.h. der Gesamtimpuls ist eine Erhaltungsgröße}$$

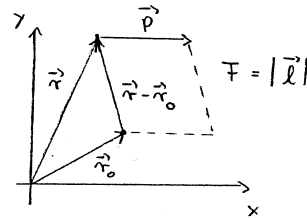
und für den Schwerpunkt: $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}}{M} t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) - \frac{\vec{p}}{M} t \quad \text{ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße}$$

b) Drehimpulserhaltung

Def.: Drehimpuls relativ zum Bezugspunkt \vec{r}_0 .

$$\boxed{\vec{l} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}}$$



$|\vec{l}|$ = Flächeninhalt des Parallelogramms

hier: $\vec{l}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{p}(t)$

$$\rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{p}(t)}_{= m \dot{\vec{r}}(t)} + (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \underbrace{\dot{\vec{p}}(t)}_{= \vec{F}} = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{F} =: \vec{m}$$

$= 0$

Def.: das von der Kraft \vec{F} ausgeübte Drehmoment

$$\boxed{\vec{m} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{m}}$$

→ der Drehimpuls ist erhalten für $\vec{m} = 0$. $\vec{F} = 0$ oder

. $\vec{F} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0) \rightarrow$ Zentralkraft

jetzt für ein System aus N Teilchen

$$\text{Gesamtdrehimpuls: } \boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{p}_i}$$

→ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \dots$ auch hier: Aufteilung nach inneren und äußeren Kräften:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{i=1}^N ((\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_e(\vec{r}_i)) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N ((\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij})}_{= 0 \text{ (siehe \u00dcbungen)}}$$

Def.: \u00e4u\u00dferes Drehmoment

$$\vec{m}_{i,e} = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_e$$

\(\Rightarrow\)

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_{i,e} =: \vec{M}_e$$

Drehimpulserhaltungssatz: f\u00fcr $\vec{M}_e = 0$ ist \vec{L} eine Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe

C, Energieerhaltung

Ausgangspunkt: $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] = \frac{d}{dt} T(t)$$

Def.: Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

es gilt also $\frac{d}{dt} T(t) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad \Big| \int_{t_a}^{t_b} dt$

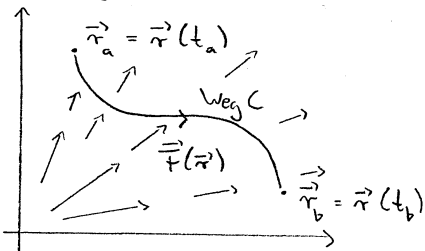
$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} T(t)}_{= T(t_b) - T(t_a) = \Delta T} = \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \Delta A : \text{ die von der Kraft } \vec{F} \text{ entlang der Bahn geleistete Arbeit}$$

$$= T(t_b) - T(t_a) = \Delta T$$

\(\rightarrow\) allgemeinste Form des Energiesatzes f\u00fcr ein Teilchen

$$\Delta T = \Delta A$$

zur Erinnerung: Linienintegrale (Math. Methoden, Kap. VI.4)



$$\int_{\vec{r}_{a,C}}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \Delta A$$

wann ist ΔA unabh\u00e4ngig vom Verlauf des Wegs? falls

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

ein solches Kraftfeld hei\u00dft "konservativ"

in diesem Fall existiert zu $\vec{F}(\vec{r})$ ein skalares Potential $V(\vec{r})$

mit $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})}$

$$\Rightarrow \Delta A = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (\vec{\nabla} V(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = - \underbrace{(V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a))}_{\Delta T} \stackrel{!}{=} \Delta T$$

$$= V(\vec{r}(t_a)) - V(\vec{r}(t_b)) = T(t_b) - T(t_a)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}(t_a)) + T(t_a) = V(\vec{r}(t_b)) + T(t_b) \quad \text{d.h.} \quad \boxed{T + V = E = \text{const.}}$$

Energieerhaltungssatz

T: kinetische Energie

V: potentielle -"

E ist Erhaltungsgröße, falls \vec{F} konservativ

E: Gesamtenergie

→ für ein System aus N Teilchen mit $\vec{F}_i = \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$

gesamte potentielle Energie:

$$\boxed{V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i,j (i < j)} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + V_e(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)} \rightarrow \vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

↳ jedes Teilchenpaar wird nur einmal gezählt

der externe Anteil:

$$V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j=1}^N V_{e,j}(\vec{r}_j)$$

z.B.: Gravitationspotential $V_{e,j}(\vec{r}_j) = -G m_j M \frac{1}{r_j}$

$$\rightarrow \vec{F}_{e,i}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_i V_{e,i}(\vec{r}_i) \quad \vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_i \\ \partial/\partial y_i \\ \partial/\partial z_i \end{pmatrix} \quad \text{Gradient bzgl. } \vec{r}_i$$

der interne Anteil:

V_{ij} hängt nur vom Betrag des Abstands ab, d.h.

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \Phi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \Rightarrow \vec{F}_{ij} \text{ Zentralkraft, denn:}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \dots$$

$$\text{NZ: } \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_1} = \Phi'_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right)^{1/2}$$

$$= a(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \frac{x_1 - x_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\dots = \underbrace{-\phi'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}_{= f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{ok.}$$

gesamte kinetische Energie :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

Gesamtenergie : $E = T + V$

Behauptung : E ist eine Erhaltungsgröße

$$\rightarrow \text{zu zeigen ist } \frac{dE}{dt} = 0, \text{ also } \frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i^2) \\ &= 2 \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad \leftarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{dV}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \frac{d}{dt} V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\text{es gilt : } \frac{d}{dt} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \text{und damit : } \frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_j \\ \frac{d}{dt} V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i V_e \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

verwende $-\vec{\nabla} V = \vec{F} \rightarrow$ vollständige Beweis siehe Übungen

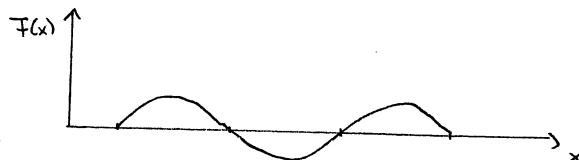
A.3 Bewegung in einer Dimension

Newton'sche Bewegungsgleichung $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

$$\text{setze } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \\ F_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow $m \ddot{x} = F(x)$ beschreibt die Bewegung im eindimensionalen Kraftfeld $F(x)$

z.B.:



Arbeit entlang des Wegs C von $\vec{r}_a = (x_a, 0, 0)$ nach $\vec{r}_b = (x_b, 0, 0)$:

$$\Delta A = \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx = [-V(x)]_{x_a}^{x_b} = V(x_a) - V(x_b)$$

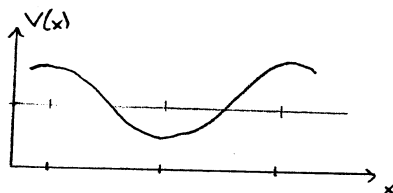
↳ unabhängig vom Weg \sim nur ein Weg in $d=1$

Gesamtenergie: $E = T + V$

Kin. Energie: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

pot. Energie

z.B.



$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)}$$

E ist Erhaltungsgröße, d.h. durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 + V(x(0)) = \text{const.} \quad \hookrightarrow x(0), \dot{x}(0)$$

damit reduziert sich $m\ddot{x} = F(x)$ auf eine Dgl. 1. Ordnung:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - V(x))$$

$$\boxed{\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} \quad (*)$$

+ : $\dot{x} > 0 \rightarrow$ nach rechts
- : $\dot{x} < 0 \rightarrow$ nach links

Lösung der Dgl. (*) durch Separation der Variablen

\rightarrow siehe Vorl. MM, Kap. IV.3.1

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a(x)} dx = dt \quad (x \text{ und } t \text{ sind separiert})$$

$$\text{Integration ergibt: } \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a(x)} dx = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 \quad \text{mit } \begin{matrix} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \end{matrix}$$

daraus folgt die implizite Lösung der Dgl. (*):

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} dx = t_2 - t_1} \quad (\text{für } +\text{-Vorzeichen})$$

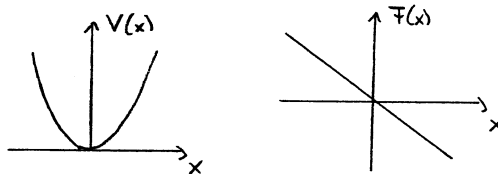
sei $g(x)$ Stammfunktion zu $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $g(x_1) = g(x(0)) = g_0$, $x_2 \rightarrow x$

$$\Rightarrow \boxed{g(x(t)) = t + g_0}$$

↳ Auflösung nach $x(t)$ ergibt Lösung der Dgl. (*)

Beispiel:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow F(x) = -kx$$

also $m\ddot{x} = -kx$ (siehe a4)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \frac{1}{2} k x^2)}} dx = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} dx = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) \right]_{x_1}^{x_2} \stackrel{!}{=} t$$

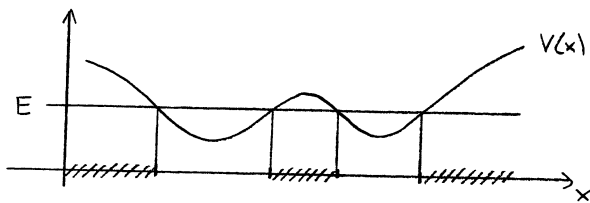
setze: $x_1 = 0$, $x_2 \rightarrow x$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

$$\text{Vorfaktor: } E = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 + \underbrace{V(x(0))}_{=0} = \frac{1}{2} m \left[\sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{\frac{k}{m}} \right]^2 = E \quad \text{ok}$$

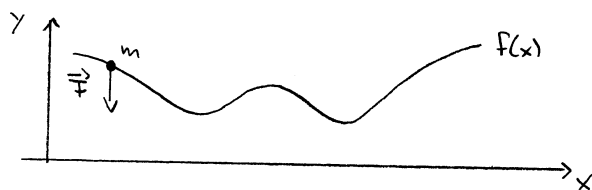
BewegungstypenAusgangspunkt: Energiesatz $E = T + V \rightarrow$ es gilt $T \geq 0$

$$\Rightarrow E - V \geq 0 \rightarrow E \geq V(x)$$

d.h.: die Bewegung des Körpers ist eingeschränkt auf x -Werte mit $E \geq V(x)$ 

#####

↳ (klassisch) verbotene Bereiche

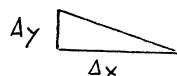
Einschub: zweidimensionale Bewegung entlang einer vorgegebenen Bahn im Schwerfeld→ die Bewegung in der x - y -Ebene erfüllt die "Zwangsbedingung"

$$y = f(x)$$

$$\text{Potential: } V(x, y) = mgy \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V = - \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

↳ entlang der Bahn gilt $V = mg f(x) \hat{=} \text{dem } V(x) \text{ da}$
eindimensionale Bewegung

$$\begin{aligned} \text{Kin. Energie: } T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + f'(x)^2) \end{aligned}$$

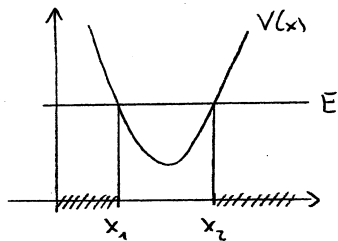


$$\Delta y = f'(x) \Delta x$$

$$\dot{y} = f'(x) \dot{x}$$

→ ähnliches Problem wie eindimensionale Bewegung im Potential $V(x)$ aber: andere Lösung für die Bahn $x(t)$ wg Zusatzterm $f'(x)^2$

a) gebundene Bewegung

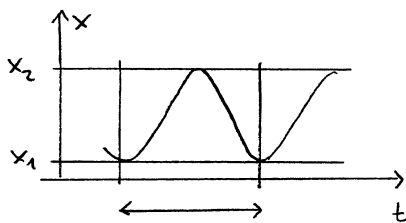


$E > V(x)$ für $x_1 < x < x_2$
 $E = V(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_2$
 → Teilchen ist im Intervall $[x_1, x_2]$ eingesperrt

für $x = x_{1/2}$ gilt: $T = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$

↳ Umkehrpunkte

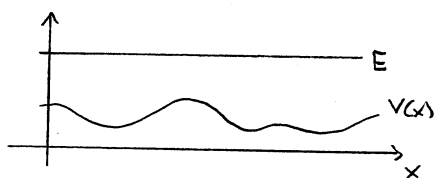
⇒ periodische Bewegung



Schwingungsperiode: \uparrow

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} dx$$

b) ungebundene Bewegung



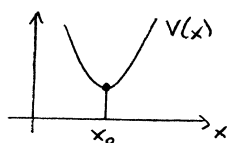
$E > V(x) \forall x$
 Teilchen bewegt sich mit variabler Geschwindigkeit nach rechts oder links (je nach Anfangsbed.)

c) Ruhelagen

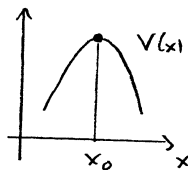
Punkt x_0 mit $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$

falls $x(t=0) = x_0 \rightarrow \ddot{x}(t=0) = \frac{1}{m} F(x_0) = 0$
 $\dot{x}(t=0) = 0$ } Teilchen ruht bei $x = x_0$

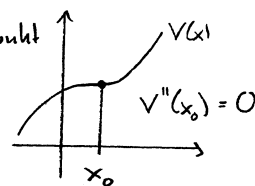
i, Minimum



ii, Maximum



iii, Sattelpunkt



im folgenden: Untersuchung der Bewegung in der Nähe dieser Ruhelagen

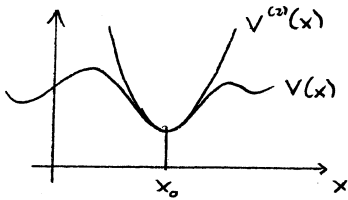
i, Minimum: $V'(x_0) = 0, V''(x_0) > 0$

Taylor-Entwicklung von $V(x)$ um x_0 bis 2. Ordnung

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{(x-x_0)V'(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 V''(x_0) + \dots$$

wird vernachlässigt

$$= V^{(2)}(x) \rightarrow \text{eindimensionale harmonische Oszillator}$$



→ Potential wird in der Nähe von x_0 durch eine Parabel angenähert: "harmonische Näherung"

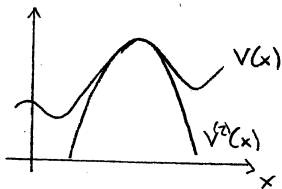
Kraft: $F(x) = -V'(x) \approx -\underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow} V''(x_0) \rightarrow \text{linear in der Auslenkung}$

$\hat{=}$ Hooke'schem Gesetz mit Federkonstante $k = V''(x_0) > 0$

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -k(x-x_0) \rightarrow m\ddot{j} = -k j$
 $\hookrightarrow \ddot{j} = -\tilde{\omega}^2 j$

Kraft wirkt der Auslenkung entgegen \Rightarrow Ruhelage ist stabil

ii, Maximum: $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) < 0$



analog, aber: $m\ddot{j} = \tilde{k} j$ mit $\tilde{k} = -V''(x_0) > 0$

\Rightarrow allgemeine Lösung $j(t) = a e^{\tilde{\omega} t} + b e^{-\tilde{\omega} t}$, $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}}$

Falls $a \neq 0$ (bestimmt durch die Anfangsbedingungen)

$|j(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ d.h.: - Ruhelage ist instabil

= Teilchen verlässt auf jeden Fall den Gültigkeitsbereich der Näherung

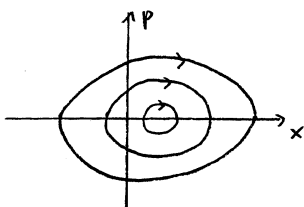
Phasenraumdarstellung

(ein Teilchen, eindimensionale Bewegung)

die Newton'sche Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = F(x) \rightarrow$ Dgl. 2. Ordnung

lässt sich schreiben als: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p \\ F(x) \end{pmatrix} \rightarrow$ zwei gekoppelte Dgl. 1. Ordnung

$\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \rightarrow$ Darstellung der Bewegung des Teilchens in der zweidimensionalen (x, p) -Ebene: Phasenraum



Achtung: Dimension des Phasenraums =

$$2 \cdot d \cdot N$$

\uparrow \uparrow \nwarrow
 x, p räumliche Dimension Zahl der Teilchen

Def.: Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = T + V$$

Für ein Teilchen in $d=1$: $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

Energiesatz: $T + V = E = H(x, p)$
 $\hookrightarrow = \text{const}$

\Rightarrow die Bahnen im Phasenraum sind Höhenlinien der Hamilton-Funktion

Phasenraumportrait: Gesamtheit aller möglichen Bahnen im Phasenraum

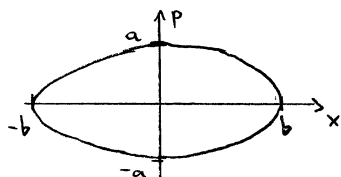
Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \quad k > 0$$

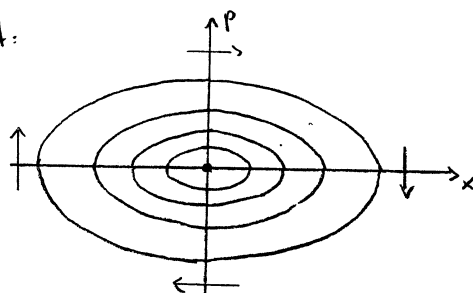
$$\rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \quad : \text{ Ellipsengleichung}$$

mit $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{\frac{2E}{k}}$



Phasenraumportrait:

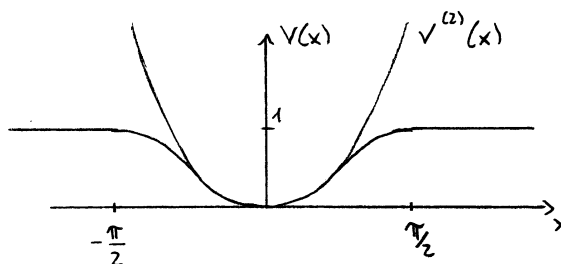


Vorteile dieser Darstellung

- durch jeden Phasenraumpunkt läuft nur eine mögliche Bahn
 \rightarrow Phasenraumbahnen können sich nicht kreuzen
denn: Bahn des Massenpunkts ist vollständig determiniert durch $x(t=0), p(t=0)$
- übersichtliche Darstellung der Bewegung
 \hookrightarrow nur für $d=1, N=1$
- jeder Punkt im Phasenraum = ein Zustand des Systems
 \Rightarrow Abzählen von Zuständen:
 - statistische Physik
 - Quantenmechanik

das nächste Beispiel:

$$V(x) = \begin{cases} \sin^2 x & : |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & : |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

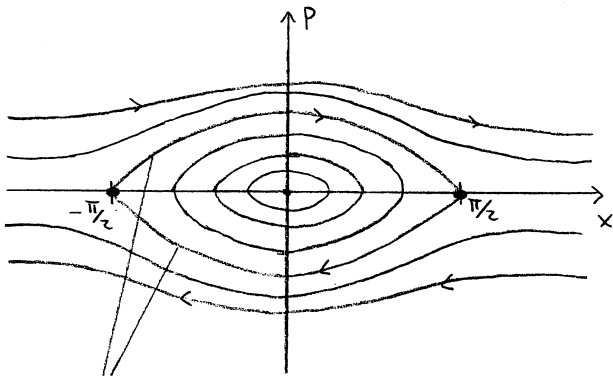


Taylor-Entwicklung um Ruhelage ($x_0=0$): $V_2(x) = x^2$

⇒ für kleine Energien: Phasenraumbahnen wie für harm. Oszillator

aber: Übergang von gebundener zu ungebundener Bewegung bei $E=1$

Phasenraumportrait:



→ $(x,p) = (0,0)$: Ruhelage
„elliptische Fixpunkt“

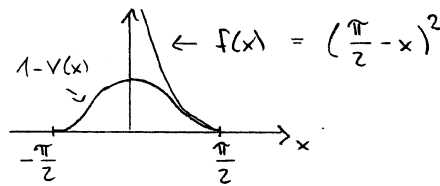
→ $(x,p) = (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$: „hyperbolische Fixpunkt“
↓ Endpunkte der Phasenraumbahnen für $E=1$

→ Separatrix ($E=1$): trennt die Bereiche gebundener und ungebundener Bewegung

die Schwingungsperiode T divergiert für $E \rightarrow 1$!

denn: $T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} dx$
 $= \sqrt{2m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-V(x)}} dx$

$x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}, E=1$



es gilt: $1-V(x) \leq f(x)$

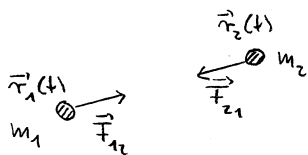
⇒ $\frac{1}{\sqrt{1-V(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

damit folgt: $T > \sqrt{2m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$
 $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi/2 - x} dx$

Subst. $y = \frac{\pi}{2} - x$

↓ $\int_0^{\pi} \frac{1}{y} dy = [\ln y]_0^{\pi} = \infty$ ✓

A.4 Zweikörperproblem mit Zentralkraft



Wechselwirkung der beiden Körper über Zentralpotential

$V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), V_e = 0$

Bewegungsgleichungen:

$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$
 $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$

Strategie: Reduktion der Bewegungsgleichungen (6 gekoppelte Dgl. 2. Ordnung)
auf ein eindimensionales Problem \rightarrow eine Dgl.
 \rightarrow verwende Erhaltungssätze aus Kap. A.2

a, Impulserhaltung

$\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{0}$: der Gesamtimpuls ist eine Erhaltungsgröße
 \rightarrow gleichförmige Bewegung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}(t)$

\Rightarrow verwende Schwerpunkts- und Relativkoordinate zur Beschreibung des Systems

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \rightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ & & & & \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= +\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{\mu} \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{V'(r)}{r} \vec{r}} \quad (*)$$

Def.: reduzierte Masse

$$\boxed{\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

das bedeutet:

- Bewegung von \vec{R} und \vec{r} kann separat betrachtet werden

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{p}}{M} t$$

$\rightarrow \vec{r}(t) \hat{=}$ Bewegung eines einzelnen Teilchens gemäß Dgl. (*)

\hookrightarrow Masse μ , Zentralpotential $V(r)$

- aus $\vec{R}(t)$ und $\vec{r}(t)$ folgen schließlich $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$

b, Drehimpulserhaltung

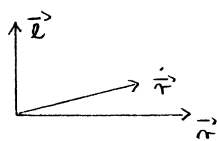
Für den Gesamt Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ (siehe Übungen)

\rightarrow Drehimpuls der Relativbewegung: $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, da $\ddot{\vec{r}} \propto \vec{r}$ (Zentralkraft) \vec{L} ist Erhaltungsgröße

\hookrightarrow Richtung und Betrag

daraus folgt:

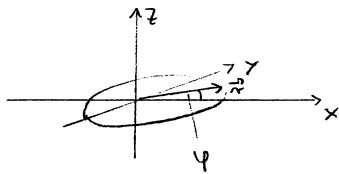


Bewegung verläuft in einer Ebene \perp zu \vec{L}

geeignete Wahl des Koordinatensystems: $\vec{L} = L \vec{e}_z$

\rightarrow Beschreibung der Bewegung durch ebene Polarkoordinaten (r, φ) in der (x, y) -Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Einheitsvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$$\text{es gilt: } \dot{\vec{r}} = \dot{e}_r r + r \dot{e}_\varphi \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{damit folgt für den Drehimpuls: } \vec{l} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \underbrace{\mu r^2 \dot{\varphi}}_{=l} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = l \vec{e}_z \end{aligned}$$

\Rightarrow Azimutalgleichung

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}$$

verknüpft die beiden zeitabhängigen Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$!

C, Energieerhaltung

$$\text{Gesamtenergie: } E_g = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}_{\downarrow} + \underbrace{V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}_{=V(r)}$$

$$\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2 \text{ einsetzen} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

Schwerpunktsenergie, ist erhalten wg. $\dot{\vec{R}} = 0$

$$E_g \text{ ist erhalten} \Rightarrow \text{Energie der Relativbewegung } E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

ist ebenfalls erhalten $= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$

$$\text{Einsetzen von } \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} :$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2}}_{=U(r)} + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$$

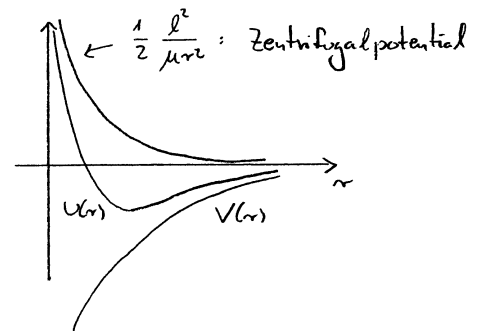
$= U(r)$: effektives Potential

das bedeutet: die Radialkoordinate r vollführt eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(r)$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}$$

- weiter wie in Kap. A3:
- Separation der Variablen
 - Integration
 - Auflösen nach $r(t)$

$$\text{mit } \varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{1}{r(t')^2} dt' \quad \rightarrow \text{vollständige Lösung des allgemeinen Zweikörperproblems}$$



das Keple-Problem

→ Zwei-Körper-Problem mit Gravitationswechselwirkung : $V(r) = -Gm_1m_2 \frac{1}{r} = -\frac{\alpha}{r}$

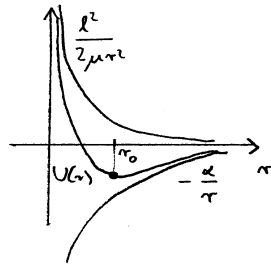
für das effektive Potential folgt damit :

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

(im folgenden: $l \neq 0$)

$r \rightarrow 0 : U(r) \rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} \rightarrow \infty$

$r \rightarrow \infty : U(r) \rightarrow -\frac{\alpha}{r} \rightarrow 0$



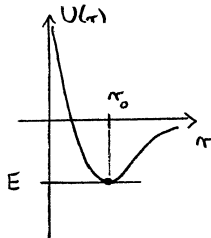
Potentialminimum bei

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$$

$$U(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{\mu\alpha^2}{l^2}$$

Bewegungstypen (Diskussion wie in Kap. A.3)

→ Ruhelage

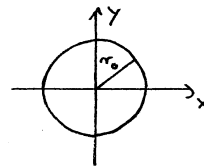


$$E = U(r_0) \rightarrow r = r_0 \quad \frac{dr}{dt} = 0$$

stabile Ruhelage der Radialbewegung.

$$\rightarrow \dot{\psi}(t) = \frac{l}{\mu r_0^2} = \omega = \text{const} \Rightarrow \psi(t) = \omega t + \psi_0$$

d.h. : Relativkoordinate vollführt Kreisbewegung

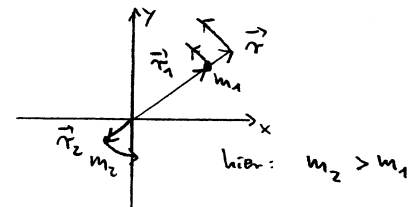


$$\vec{r}(t) = r_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \psi_0) \\ \sin(\omega t + \psi_0) \end{pmatrix}$$

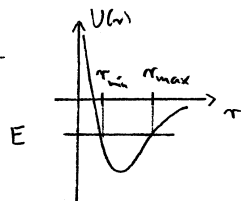
⇒ Bewegung in Teilchenkoordinaten \vec{r}_1, \vec{r}_2

setze $\vec{R} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ebenfalls} \\ \text{Kreisbewegung} \end{array}$$

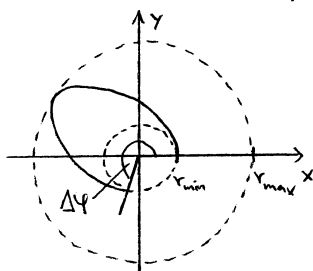


→ gebundene Bewegung



$$U(r_0) < E < 0$$

⇒ Oszillation zwischen den Umkehrpunkten r_{\min} und r_{\max}



$\Delta\psi$: Winkelverdrängung nach einer Periode der Oszillation

es gilt : $\dot{\psi}(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\psi}{2} = \int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \frac{l}{\mu r(t')^2} dt' = \dots$$

Substitution $t' \rightarrow r$, $\frac{dr}{dt'} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}$, $\int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \rightarrow \int_{r_{\min}}^{r_{\max}}$

$$\dots = \frac{l}{\mu} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr = \frac{l}{\mu} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U(r))}} dr$$

Bedingung für geschlossene Bahnen:

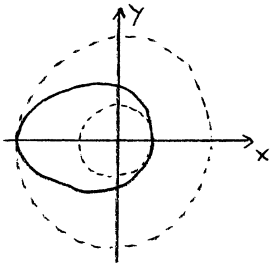
$$\boxed{q \Delta\psi = 2\pi p}$$

mit $q, p \in \mathbb{N}$

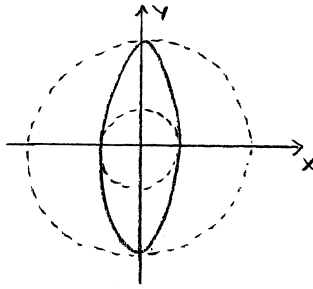
q : Zahl der Oszillationen $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$
 p : Zahl der Umläufe

$$\hookrightarrow \Delta\psi = 2\pi \frac{p}{q} \quad \text{mit } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

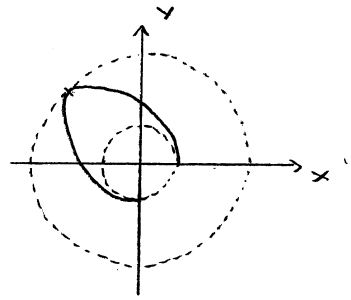
Beispiele:



$$\Delta\psi = 2\pi \rightarrow q=1, p=1$$

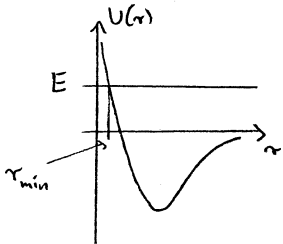


$$\Delta\psi = \pi \rightarrow q=2, p=1$$



$$\Delta\psi = \frac{3}{2}\pi \rightarrow q=4, p=3$$

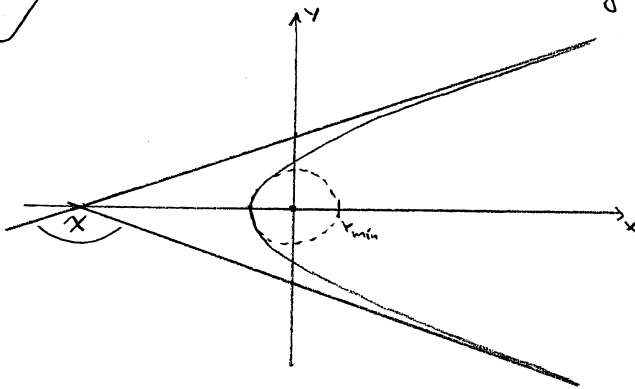
ungebundene Bewegung



$E > 0$: Reflexion an einem Umkehrpunkt r_{\min}

für große Abstände: $V(r) \rightarrow 0$

\Rightarrow geradlinige Bewegung

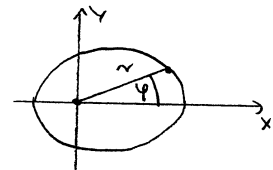


χ : Streuwinkel

Berechnung der Bahnkurven

hier: nicht die vollen Lösungen $r(t)$ und $\psi(t)$

stattdessen: Berechnung der Form der Bahn $r(\psi)$



$$\text{es gilt: } \underbrace{\frac{d}{dt} r(\psi)}_{= \dot{r}} = \frac{dr}{d\psi} \dot{\psi} = \underbrace{\frac{dr}{d\psi} \frac{l}{\mu r^2}}_{\text{Einsetzen in } E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)}$$

Einsetzen in $E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$

$$\Rightarrow E = \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

diese Ausdruck lässt sich vereinfachen durch Verwendung des inversen Radius

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{l^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u} \quad (*) \quad \text{inhomogene, nicht-lineare Dgl. 2. Ordnung für } u(\varphi)$$

bilde $\frac{d}{d\varphi}$ von Gl. (*)

$$0 = \frac{l^2}{2\mu} \left[2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{du}{d\varphi} \quad \left| \cdot \frac{1}{\frac{du}{d\varphi}} \right.$$

$$0 = \frac{l^2}{\mu} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) - \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha\mu}{l^2}} \quad \text{inhomogene, lineare Dgl. 2. Ordnung für } u(\varphi)$$

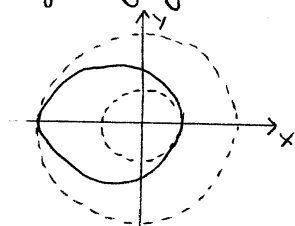
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung: $u_0(\varphi) = a \sin \varphi + b \cos \varphi$

spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: $u_s = \frac{\alpha\mu}{l^2} (= \text{const})$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: } \boxed{u(\varphi) = \frac{\alpha\mu}{l^2} + a \sin \varphi + b \cos \varphi}$$

jetzt: geschickte Wahl der Anfangsbedingungen

$$\rightarrow r(\varphi=0) = r_{\min}$$



$\Rightarrow u(\varphi=0)$ maximal, also

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} \leq 0$$

$$\Rightarrow a = 0, b \geq 0 \quad \text{und damit} \quad u(\varphi) = \frac{1}{k} + b \cos \varphi \quad \text{mit} \quad k = \frac{l^2}{\alpha\mu}$$

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{k} \left(1 + \underbrace{bk}_{=\varepsilon} \cos \varphi \right)$$

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (*)$$

Gl. (*) bestimmt die geometrische Form der Bahn der Relativkoordinate des Zweikörperproblems

ε : „numerische Exzentrizität“

$\varepsilon = 0$: Kreis

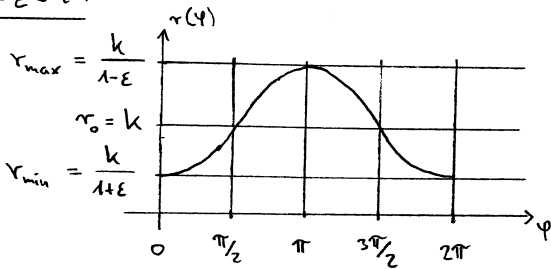
$0 < \varepsilon < 1$: Ellipse

$\varepsilon = 1$: Parabel

$\varepsilon > 1$: Hyperbel

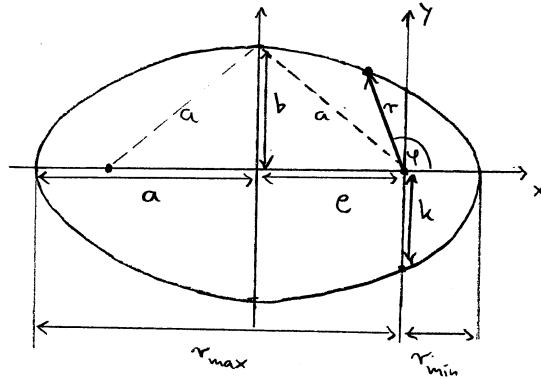
$\underline{\epsilon = 0}$: $r(\varphi) = k = \frac{l^2}{\alpha \mu} = \text{const.}$
 $= r_0$: Ruhelage der Radialbewegung

$0 < \epsilon < 1$:



→ gebundene Bewegung zwischen r_{\min} und r_{\max}
 → Winkelverschiebung $\Delta\varphi = 2\pi$

→ Ellipse mit einem Brennpunkt bei $(x,y) = (0,0)$



Bestimmung der Ellipsenparameter:

$r_{\min} + r_{\max} = 2a$

⇒ $a = \frac{k}{1-\epsilon^2}$ große Halbachse

$e = a - r_{\min} = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min})$

$e = \frac{\epsilon k}{1-\epsilon^2}$ lineare Exzentrizität, Brennweite

es gilt : $e = \epsilon a$

kleine Halbachse (b) folgt aus $b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1-\epsilon^2)$

$b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$

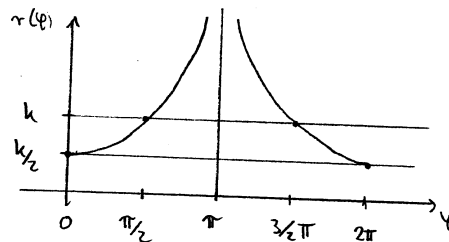
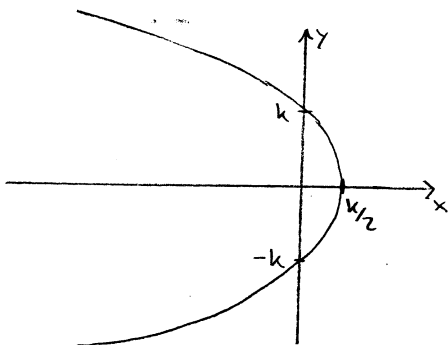
Gl. (*) $\hat{=}$ Ellipsengleichung in Polarkoordinaten

in kartesischen Koordinaten :

$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\underline{\epsilon = 1}$

$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \cos\varphi}$

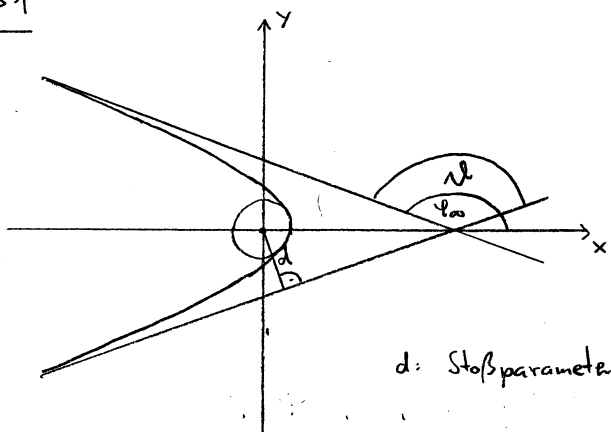


- $r(\varphi)$ divergiert bei $\varphi = \pi$

- Streuwinkel $\chi = \pi$

- Parabel →

$x = \frac{k}{2} - \frac{y^2}{2k}$

$\varepsilon > 1$ 

d: Stoßparameter

 $r(\varphi)$ divergiert bei

$$\cos \varphi_{\infty} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$2\varphi_{\infty} - \pi = \chi$$

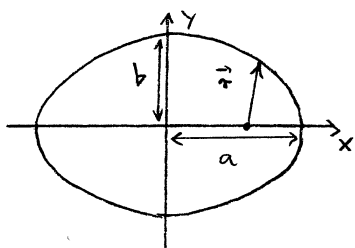
$$\Rightarrow \text{Streuwinkel } \chi = 2\varphi_{\infty} - \pi$$

die Keple'schen Gesetze (1609 - 1618)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Die Verbindungslinie zwischen den Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

folgt direkt aus der Drehimpulserhaltung $\rightarrow \Delta A = \frac{l}{2\mu} \Delta t$ (siehe Übungen)
 $= \text{const.}$

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich, wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.

gesamte Fläche der Ellipse: $A = \pi ab$

$$\text{mit } a = \frac{k}{1-\varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{ka}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{k}{a}} \quad \Rightarrow \quad A = \pi \sqrt{k} a^{3/2}$$

außerdem gilt: $A = \frac{l}{2\mu} T$ ist die vom Vektor \vec{r} in der Umlaufzeit T überstrichene Fläche

$$\text{mit } k = \frac{l^2}{\mu} \text{ folgt damit: } \frac{l}{2\mu} T = \pi \frac{l}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3}$$

für zwei Planeten (1,2) folgt also: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\mu_1/d_1}{\mu_2/d_2} \frac{a_1^3}{a_2^3}$

aus $\mu_i = \frac{m_i M}{(m_i + M)}$ und $\alpha_i = G m_i M$ mit $M = \text{Summenmasse}$

folgt: $\frac{\mu_i}{\alpha_i} = \frac{1}{G} \frac{1}{(m_i + M)} \approx \frac{1}{GM}$ d.h. das 3. Keplersche Gesetz ist näherungsweise erfüllt
 \uparrow
 $m_i \ll M$

Drei und mehr Körper

Zwei Körper - Problem : 6 Dgl. 2. Ordnung \longrightarrow eine Dgl. 1. Ordnung
 \downarrow
 Verwendung aller verfügbaren Erhaltungssätze

Drei Körper - Problem : 9 Dgl. 2. Ordnung
 es stehen jedoch keine weiteren Erhaltungssätze zur Verfügung

\Rightarrow das Problem von $N \geq 3$ gravitativ wechselwirkenden Körpern ist i.A. analytisch nicht lösbar (es gibt lösbare Spezialfälle)

\rightarrow Konsequenzen für - Stabilität / Vorhersagbarkeit der Teilchenbahnen
 \rightarrow chaotische Bewegung

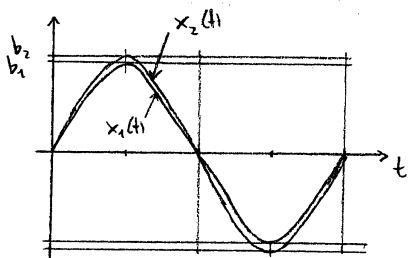
Beispiel: Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen

• betrachte zunächst den harmonischen Oszillator \rightarrow allgemeine Lösung $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

\rightarrow zwei verschiedene Bahnen mit fast identischen Anfangsbedingungen

$$a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 \neq b_2 \quad \text{also} \quad x_1(t) = b_1 \sin \omega t$$

$$x_2(t) = b_2 \sin \omega t$$



$$\rightarrow |x_2(t) - x_1(t)| = |b_2 - b_1| \underbrace{|\sin \omega t|}_{= \omega t \text{ für kleine } t}$$

d.h. $|x_2(t) - x_1(t)|$ wächst linear mit t

• jetzt: chaotische Dynamik

$$\boxed{|x_1(t) - x_2(t)| = e^{\lambda t} |x_1(0) - x_2(0)|}$$

λ : Liapunov - Exponent

für $\lambda > 0$:

- exponentielle An wachsen von kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen
- d.h. extreme Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen

A.5 Harmonische Schwingungen

betrachte Systeme in der Nähe einer Ruhelage

→ Linearisierung der Bewegungsgleichungen → ein System von gekoppelten, linearen Dgl

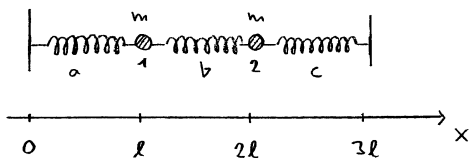
Dimension d , N Teilchen

⇒ $d \cdot N$ Gleichungen für $d \cdot N$ Freiheitsgrade → lösbar für beliebig große $d \cdot N$

Beispiel: zwei gekoppelte Oszillatoren

→ zwei Körper am Ort $x_1(t), x_2(t)$

betrachte nur eindimensionale Bewegung



Ruhelage: $x_1 = l, x_2 = 2l$

Auslenkungen aus der Ruhelage: $\xi_1 = x_1 - l, \xi_2 = x_2 - 2l$

→ drei Federn (a, b, c), jeweils mit Federkonstante k

es wirken also folgende Kräfte:

- Feder a auf Teilchen 1: $F_{a1} = -k \xi_1$
- b → 1: $F_{b1} = k(\xi_2 - \xi_1)$
- b → 2: $F_{b2} = -k(\xi_2 - \xi_1)$
- c → 2: $F_{c2} = -k \xi_2$

alle Kräfte = 0 für $\xi_1 = \xi_2 = 0$

gesamte potentielle Energie:

$$V(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} k \xi_1^2 + \frac{1}{2} k (\xi_1 - \xi_2)^2 + \frac{1}{2} k \xi_2^2$$

→ Beiträge von Feder a, b, c

daraus ergeben sich die Kräfte: $F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial \xi_i}$

$$\Rightarrow - \frac{\partial V}{\partial x_1} = -k \xi_1 - k(\xi_1 - \xi_2) = \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \frac{d \xi_1}{d x_1} = 1$$

$$- \frac{\partial V}{\partial x_2} = k(\xi_1 - \xi_2) - k \xi_2$$

Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i \Rightarrow$$

$$m \ddot{\xi}_1 = -2k \xi_1 + k \xi_2$$

$$m \ddot{\xi}_2 = k \xi_1 - 2k \xi_2$$

→ zwei gekoppelte, lineare Dgl 2. Ordnung

$$\rightarrow m \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}}_{=\vec{\ddot{x}}} = \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2k\ddot{x}_1 + k\ddot{x}_2 \\ k\ddot{x}_1 - 2k\ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = k M \vec{x}} \quad (*)$$

Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \lambda^2 \vec{a} e^{\lambda t}$

Einsetzen in (*): $m \lambda^2 \vec{a} e^{\lambda t} = k M \vec{a} e^{\lambda t} \quad | \cdot e^{-\lambda t}$

$$m \lambda^2 \vec{a} = k M \vec{a}$$

\Rightarrow Formulierung als Eigenwertproblem: $\boxed{M \vec{a} = \gamma \vec{a}}$ mit $\gamma = \frac{m \lambda^2}{k}$

Eigenwert Eigenvektor

Bestimmung der Eigenwerte

\rightarrow Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(M - \gamma \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -2 - \gamma & 1 \\ 1 & -2 - \gamma \end{pmatrix} = (2 + \gamma)^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow 2 + \gamma_{1/2} = \pm 1$

$\gamma_1 = -3$
 $\gamma_2 = -1$

beide Eigenwerte sind negativ!
 $\Rightarrow \lambda_i = \sqrt{\frac{k}{m} \gamma_i}$ beide rein imaginär

setze $\lambda_i = i \omega_i \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ω_i : Eigenfrequenzen

allgemeine Lösung der Dgl. (*):

$$\vec{x}(t) = b_1 \vec{a}_1 e^{i \omega_1 t} + b_2 \vec{a}_2 e^{i \omega_2 t}$$

mit $b_{1/2} \in \mathbb{C}$

(normiert)
 \vec{a}_i : Eigenvektor zum Eigenwert γ_i
 (werden später bestimmt)

setze $b_i = \alpha_i + i \beta_i \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \rightarrow b e^{i \omega t} = \underbrace{\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t}_{= \operatorname{Re}(b e^{i \omega t})} + i \operatorname{Im}(b e^{i \omega t})$

physikalische Lösung:

$$\operatorname{Re}(\vec{x}(t)) = \vec{a}_1 (\alpha_1 \cos \omega_1 t - \beta_1 \sin \omega_1 t) + \vec{a}_2 (\alpha_2 \cos \omega_2 t - \beta_2 \sin \omega_2 t)$$

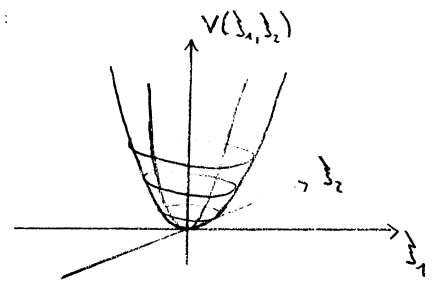
$\alpha_{1/2}, \beta_{1/2}$ festgelegt durch die Anfangsbedingungen

Für die (physikalische) Lösung der Dgl. (*) ergibt sich damit:

→ Schwingung um die Ruhelage $\xi_1 = \xi_2 = 0$

d.h.: Ruhelage ist stabil

denn: $V(0,0)$ ist ein (lokales) Minimum der potentiellen Energie



Bestimmung der Eigenvektoren

→ Lösung des linearen Gleichungssystems $M\vec{a} = \gamma\vec{a}$

$i=1 \rightarrow \gamma_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I): } -2a_{11} + a_{12} = -3a_{11} \\ \text{(II): } a_{11} - 2a_{12} = -3a_{12} \end{array}$$

aus (I) und (II) folgt: $a_{11} = -a_{12}$

⇒ normierter Eigenvektor:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$i=2 \rightarrow \gamma_2 = -1$

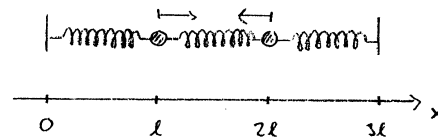
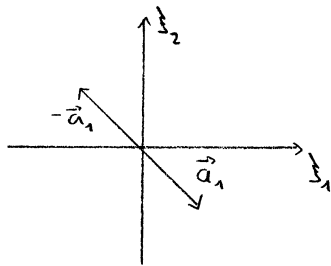
analoge Rechnung ergibt: $a_{21} = a_{22}$ ⇒

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenvektoren beschreiben die Eigenschwingungen des Systems

→ setze z.B. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\beta_1 = -1$

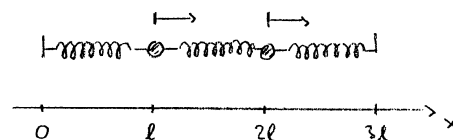
⇒ $\vec{\xi}(t) = \vec{a}_1 \sin(\omega_1 t)$ dh. Richtung ist zeitunabhängig!



dh.: - die beiden Körper schwingen gegenphasig
- alle drei Federn werden deformiert

→ setze $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$

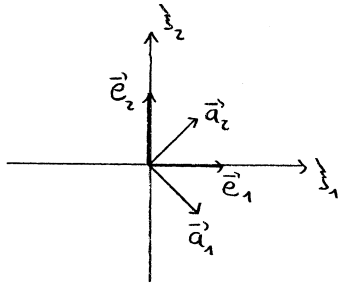
⇒ $\vec{\xi}(t) = \vec{a}_2 \sin(\omega_2 t)$



- die beiden Körper schwingen in Phase
- die mittlere Feder wird nicht deformiert

$$\omega_1 > \omega_2 \quad \Leftarrow$$

jetzt: Darstellung der Bewegung in dem von \vec{a}_1, \vec{a}_2 aufgespannten Koordinatensystem,



Koordinatensystem k aufgespannt durch \vec{e}_1, \vec{e}_2

→ Darstellung eines Vektors in k :

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^2 \xi_i \vec{e}_i \quad \rightarrow \quad \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$k' \text{ aufgespannt durch } \vec{a}_1, \vec{a}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \sum_{i=1}^2 \eta_i \vec{a}_i \quad \rightarrow \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

siehe Skript MM: $\vec{\eta} = \text{Drehmatrix} \cdot \vec{\xi}$

in unserem Fall gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\eta} = S^t \vec{\xi} \quad (\text{I}) \\ \vec{\xi} = S \vec{\eta} \quad (\text{II}) \end{array}}$$

(II) folgt aus (I) wegen

$$S \vec{\eta} = \underbrace{S S^t}_{= \mathbb{1}} \vec{\xi} = \vec{\xi}, \text{ da } S \text{ orthogonal}$$

dabei ist S die Transformationsmatrix zur

$$(\text{symmetrischen}) \text{ Matrix } A \quad \Rightarrow \quad S = (\vec{a}_1 \vec{a}_2), \quad S^t = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix}$$

Begründung für Gl. (I):

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{\xi} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } \vec{\xi} = \vec{a}_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \vec{\xi} = \vec{a}_2 \end{cases}$$

es gilt also:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}$$

Matrixdarstellung der potentiellen Energie

die potentielle Energie in den Koordinaten ξ_1, ξ_2 hat die Form:

$$V = \frac{1}{2} k \xi_1^2 + \frac{1}{2} k (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{2} k \xi_2^2 = k (\xi_1^2 + \xi_2^2) - k \xi_1 \xi_2$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{k}{2} \underbrace{\vec{\xi}^t M \vec{\xi}}$$

$$= (\xi_1 \xi_2) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = -2 \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_2 - 2 \xi_2^2$$

$$= 2 (\xi_1 \xi_2 - \xi_1^2 - \xi_2^2) \quad \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - 2 \xi_2 \end{pmatrix}$$

Ziel: Darstellung von V in den Koordinaten η_1, η_2

→ schreibe $V = -\frac{k}{2} \vec{\xi}^t \mathbb{1} M \mathbb{1} \vec{\xi}$

d.h. Einfügen der Einheitsmatrix

mit $\mathbb{1} = S S^t$ folgt:

$$V = -\frac{k}{2} \underbrace{\vec{\xi}^t S}_{=\vec{\eta}^t} \underbrace{S^t M S}_{=D} \underbrace{S^t \vec{\xi}}_{=\vec{\eta}}$$

mit der Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$

zu $\vec{\eta}^t = \vec{\xi}^t S$: aus $\vec{\eta} = S^t \vec{\xi}$ folgt für die i-te Komponente

$$\eta_i = (\vec{\eta})_i = \sum_k (S^t)_{ik} (\vec{\xi})_k = \sum_k S_{ki} \xi_k$$

andere seite gilt: $(\vec{\eta}^t)_i = (\vec{\xi}^t S)_i = \sum_k (\vec{\xi}^t)_k S_{ki} = \eta_i$ ok
 $= \xi_k$

damit folgt für V:

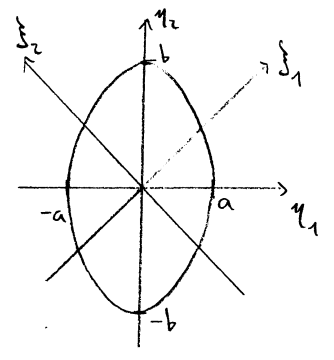
$$V = -\frac{k}{2} \vec{\eta}^t D \vec{\eta} = -\frac{k}{2} (\eta_1 \eta_2) \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{2} (\gamma_1 \eta_1^2 + \gamma_2 \eta_2^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\eta_1, \eta_2) = \frac{k}{2} (3\eta_1^2 + \eta_2^2)}$$

das bedeutet:

1. Linien konstanter potentieller Energie sind Ellipsen

denn: $1 = \frac{3k}{2V} \eta_1^2 + \frac{k}{2V} \eta_2^2 = \frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}$ mit $a = \sqrt{\frac{2V}{3k}}$
 $b = \sqrt{\frac{2V}{k}}$



Hauptachsen der Ellipse

hier: Hauptachsen = Koordinatenachsen η_1, η_2

⇒ Diagonalisierung der Matrix $M \hat{=}$ „Hauptachsentransformation“

2. besonders einfache Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen in den Koordinaten η_1, η_2

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} m \ddot{\eta}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial \eta_1} = -3k \eta_1 \\ m \ddot{\eta}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial \eta_2} = -k \eta_2 \end{aligned} \right\} \text{die beiden Dgl. sind entkoppelt!}$$

Lösung: $\eta_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}$ mit $\lambda_1^2 = -\frac{3k}{m} = -\omega_1^2$, $\eta_2(t)$ ebenso

Harmonische Schwingungen in N-Teilchen-Systemen

N Teilchen in Dimension d

$$\rightarrow \text{Koordinaten } (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, x_2, \dots, x_f) = \vec{X}$$

mit $f = dN$: Zahl der Freiheitsgrade

$$\text{und } \vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3), \vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6), \dots \quad (\text{für } d=3)$$

potentielle Energie: $V = V(x_1, x_2, \dots, x_f) = V(\vec{X})$

Annahme: es existiert eine Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$ des N-Teilchen-Systems, $\vec{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)})$

\rightarrow bei $\vec{X} = \vec{X}^{(0)}$ verschwinden alle Kräfte, d.h.

$$F_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{\vec{X} = \vec{X}^{(0)}} = 0$$

\hookrightarrow Komponente der Kraft auf das entsprechende Teilchen

auch hier: Auslenkungen aus der Ruhelage $\vec{\xi} = \vec{X} - \vec{X}^{(0)} \rightarrow \xi_i = x_i - x_i^{(0)} \quad i=1, \dots, f$

Taylor-Entwicklung von $V(\vec{X})$ um die Ruhelage:

$$V(\vec{X}) = V(\vec{X}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{\vec{X}^{(0)}} \xi_i}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{X}^{(0)}}}_{=V_{ij}^{(2)}} \xi_i \xi_j + \dots$$

Def.: Hesse-Matrix $V^{(2)}$

\rightarrow symmetrische $f \times f$ -Matrix mit den Matrixelementen

$$V_{ij}^{(2)} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{X}^{(0)}}$$

$$\Rightarrow V(\vec{X}) = V(\vec{X}^{(0)}) + \frac{1}{2} \vec{\xi}^t V^{(2)} \vec{\xi} + \dots$$

Terme höhere Ordnung wegd. vernachlässigt!

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_n \ddot{\xi}_n &= - \frac{\partial V}{\partial \xi_n} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \sum_{ij} V_{ij}^{(2)} \xi_i \xi_j = \dots \\ &= \sum_{ij} V_{ij}^{(2)} (\xi_i \delta_{jn} + \xi_j \delta_{in}) = \sum_i V_{in}^{(2)} \xi_i + \sum_j V_{nj}^{(2)} \xi_j \\ &= 2 \sum_i V_{in}^{(2)} \xi_i \\ \dots &= - \sum_i V_{ni}^{(2)} \xi_i \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

$$\boxed{T \ddot{\vec{s}} = -V^{(2)} \vec{s}}$$

mit der diagonalen Masse-Matrix

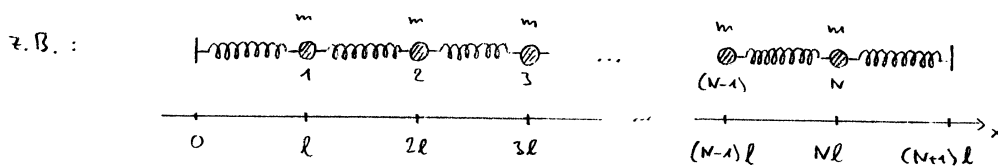
$$T = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & m_f \end{pmatrix}$$

Achtung: $m_1 = m_2 = m_3$: Masse von Teilchen 1 etc.

dann weiter wie oben, d.h. Ansatz $\vec{s}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$

→ Abbildung auf ein Eigenwertproblem

die harmonische Kette



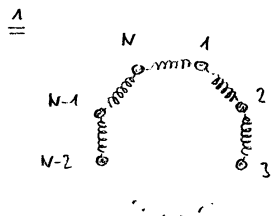
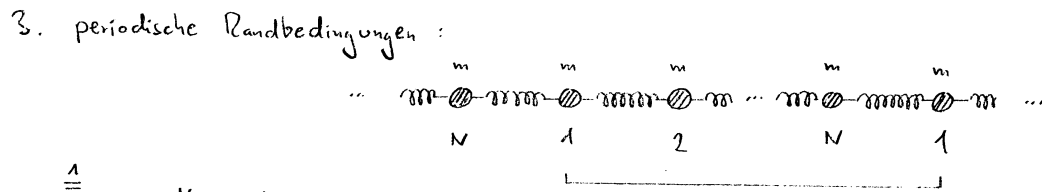
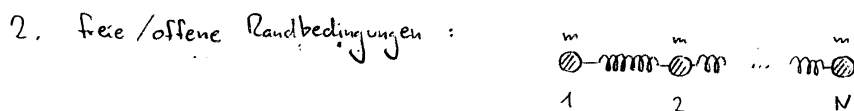
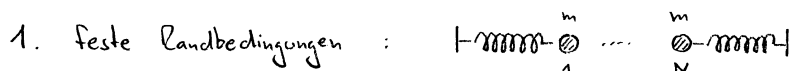
potentielle Energie $V(\vec{s}) = \frac{1}{2} k s_1^2 + \frac{1}{2} k s_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} k (s_{n+1} - s_n)^2$

Hesse-Matrix: $V_{ij}^{(2)} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial s_i \partial s_j} \right|_{\vec{s}=0}$

es ergibt sich: $V^{(2)} = -k M$ mit $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$

die Eigenschwingungen folgen aus der Lösung des Eigenwertproblems $M \vec{a} = \gamma \vec{a}$

Randbedingungen



dasselbe Teilchen

→ zusätzliche Kopplung von Teilchen 1 an Teilchen N

allgemeine Form der potentiellen Energie:

$$V(\vec{\xi}) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} k (\xi_{n+1} - \xi_n)^2 + V_{RB}(\xi_1, \xi_N)$$

$$\text{mit } V_{RB}(\xi_1, \xi_N) = \begin{cases} \frac{1}{2} k \xi_1^2 + \frac{1}{2} k \xi_N^2 & : \text{ feste Randbedingung} \\ 0 & : \text{ offene } - " - \\ \frac{1}{2} k (\xi_1 - \xi_N)^2 & : \text{ periodische } - " - \end{cases}$$

im folgenden: Lösung des Eigenwertproblems für feste Randbedingungen

schreibe $M\vec{a} = \gamma\vec{a}$ als lineares Gleichungssystem für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$:

$$(1): -2a_1 + a_2 = \gamma a_1$$

$$(n): a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} = \gamma a_n \quad n = 2, \dots, N-1$$

$$(N): a_{N-1} - 2a_N = \gamma a_N$$

$$\text{Ansatz: } \boxed{a_n = a \sin(qn)} \quad (*)$$

$$\rightarrow \text{Einsetzen in (n): } a \sin(q(n-1)) - 2a \sin(qn) + a \sin(q(n+1)) = \gamma a \sin(qn) \quad | \cdot \frac{1}{a}$$

$$\text{es gilt: } \sin(qn \pm q) = \sin(qn) \cos(q) \pm \cos(qn) \sin(q)$$

$$\Rightarrow \sin(qn) \cos(q) - \cos(qn) \sin(q) - 2 \sin(qn) + \sin(qn) \cos(q) + \underbrace{\cos(qn) \sin(q)}_{\checkmark} = \gamma \sin(qn)$$

$$\cdot \frac{1}{\sin(qn)} \text{ ergibt: } 2 \cos(q) - 2 = \gamma \quad \boxed{\gamma = 2(\cos q - 1)} \quad (**)$$

das bedeutet: - der Ansatz (*) erfüllt die Gleichungen (n) für beliebige q
- Eigenwerte ergeben sich aus (**)

\rightarrow Einsetzen in (1):

$$\begin{aligned} -2a \sin(q) + \underbrace{a \sin(2q)}_{= 2 \sin(q) \cos(q)} &= \gamma a \sin(q) \stackrel{(**)}{=} 2(\cos q - 1) a \sin(q) \quad | \cdot \frac{1}{a \sin(q)} \\ &= 2 \sin(q) \cos(q) \end{aligned}$$

$$-2 + 2 \cos(q) = 2(\cos(q) - 1) \quad \checkmark$$

das bedeutet: - der Ansatz (*) erfüllt die Randbedingung (1) mit dem γ aus (**)

→ Einsetzen in (N) :

$$a \underbrace{\sin(q(N-1))} - 2a \sin(qN) = \gamma a \sin(qN) \quad | \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \sin(qN) \cos(q) - \cos(qN) \sin(q)$$

$$\sin(qN) \cos(q) - \cos(qN) \sin(q) - \underbrace{2 \sin(qN)}_{\checkmark} = 2 \cos(q) \sin(qN) - \underbrace{2 \sin(qN)}_{\checkmark}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin(qN) \cos(q) + \cos(qN) \sin(q)}_{=} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\sin(q(N+1)) = 0}$$

$$= \sin(qN + q)$$

das bedeutet: - die Randbedingung (N) ist nur für bestimmte Werte von q erfüllt

$$\rightarrow q(N+1) = k\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_k = \frac{k\pi}{N+1}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

damit folgt für die Eigenvektoren \vec{a}_k :

$$\boxed{(\vec{a}_k)_n = a \sin(q_k n) = a \sin\left(\frac{k n \pi}{N+1}\right)} \quad \text{a wird durch Normierung festgelegt}$$

mit den Eigenwerten:

$$\boxed{\gamma_k = 2(\cos(q_k) - 1) = 2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) - 1\right)}$$

es gibt nur N verschiedene Eigenvektoren, denn

$$\rightarrow \vec{a}_{-k} = -\vec{a}_k \quad \Rightarrow \quad \text{betrachte nur } k \geq 0$$

$$\rightarrow \vec{a}_k = \vec{0} \quad \text{für } k = m(N+1) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\vec{0}\text{-Vektor ist kein Eigenvektor})$$

wegen $\sin(mn\pi) = 0$

$$\rightarrow \vec{a}_{k'} = \vec{a}_k \quad \text{für } k' = k + 2m(N+1) \quad m \in \mathbb{Z}$$

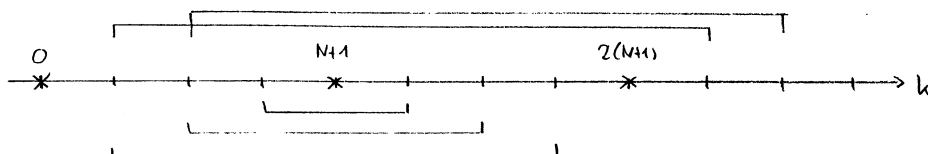
wegen $\sin\left(\frac{k'n\pi}{N+1}\right) = \sin\left(\frac{kn\pi}{N+1} + 2mn\pi\right) = \sin\left(\frac{kn\pi}{N+1}\right)$

$$\rightarrow \vec{a}_{k'} = -\vec{a}_k \quad \text{für } k = N+1 + m$$

und $k' = N+1 - m$

$$\text{wegen } \sin\left((N+1 \pm m) \frac{n\pi}{N+1}\right) = \sin\left(n\pi \pm \frac{mn\pi}{N+1}\right) = \pm (-1)^n \sin\left(\frac{mn\pi}{N+1}\right)$$

Zusammen:



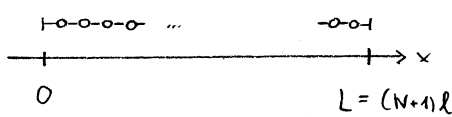
⇒ Einschränkung der k -Werte auf

$$k = 1, \dots, N$$

Orthogonalität: es gilt $\vec{a}_k \cdot \vec{a}_{k'} = 0$ für $k \neq k'$ und $k, k' = 1, \dots, N$

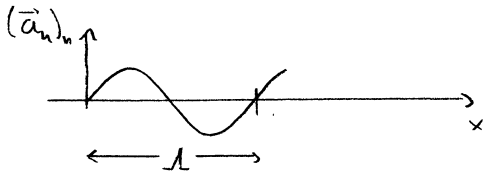
denn: alle γ_k verschieden (siehe unten)

Eigenschwingungen: Sinus-Schwingungen mit Wellenlänge λ



→ Ortskoordinate $x = kn$

$$\Rightarrow (\vec{a}_k)_n = a \sin\left(\frac{k\pi}{N+1} \frac{x}{l}\right) = a \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$$



Nullstellen der Auslenkung bei $k\pi \frac{x}{L} = 0, \pi, 2\pi, \dots$

$$\Rightarrow k\pi \frac{\lambda}{L} = 2\pi$$

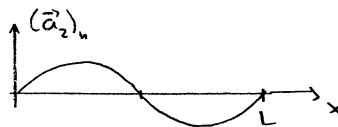
$$\lambda = \frac{2L}{k}$$

$k=1 : \lambda = 2L$



Grundschiwingung der Kette

$k=2 : \lambda = L$

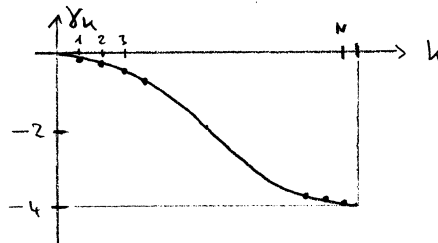


⋮

Spektrum der Eigenwerte / Eigenfrequenzen:

$$\gamma_k = 2 \left(\cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) - 1 \right)$$

$$k = 1, \dots, N$$

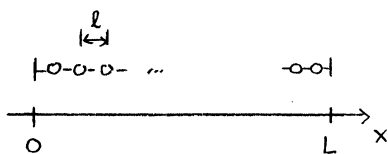


⇒ Eigenfrequenzen $\omega_i = \sqrt{-\frac{k}{m} \gamma_i}$ $i = 1, \dots, N$

die eindimensionale Wellengleichung

Idee: Übergang von einem System mit endlich vielen Freiheitsgraden (harmonische Kette mit N Teilchen) zu einem System mit unendlich vielen Freiheitsgraden

→ Kontinuum



betrachte den Limes $N \rightarrow \infty$, so dass $L = (N+1)l$ fest

d.h. $l = \frac{L}{N+1} \rightarrow 0$

→ Übergang von diskreten Auslenkungen $\dot{z}_n(t)$ zu einem Auslenkungsfeld $\dot{z}(x,t)$

$$\text{mit } x = nl, \quad 0 < x < L$$

zu beachten: beim Übergang $l \rightarrow 0$ müssen die Teilchenmassen m und die Federkonstanten k entsprechend skaliert werden:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{l}} \quad \rho: \text{ eindimensionale Massendichte}, \quad \boxed{k = kl}$$

mit ρ, k fest, d.h. $m \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$

folgt aus der Struktur der kinetischen und potentiellen Energie

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N (\dot{z}_n(t))^2 = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N (\dot{z}(nl, t))^2$

schreibe das Integral $\int_0^L dx (\dot{z}(x,t))^2$ als Riemann-Summe:

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N l (\dot{z}(nl, t))^2$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} T = \frac{1}{2} \underbrace{m}_{=\rho} \int_0^L dx (\dot{z}(x,t))^2 \quad \text{soll einen endlichen Wert ergeben} \Rightarrow \rho \text{ fest}$$

potentielle Energie:

$$V(\vec{z}) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} k (z_{n+1} - z_n)^2 + \underbrace{V_{RB}(z_1, z_N)}_{\text{Kann vernachlässigt werden}}$$

es gilt: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$

mit $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{z_{n+1} - z_n}{(n+1)l - nl} = \frac{1}{l} (z_{n+1} - z_n) \Rightarrow (z_{n+1} - z_n) = \underbrace{l}_{\substack{\uparrow \\ \text{im Limes } l \rightarrow 0}} \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(\vec{z}) &\approx \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} k l^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{kl}_{=K} \sum_{n=1}^{N-1} l \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\ &= K \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} l}_{\substack{\xrightarrow{l \rightarrow 0} \\ (N \rightarrow \infty)}} \int_0^L dx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} V = \frac{1}{2} K \int_0^L dx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \quad \text{soll einen endlichen Wert ergeben} \Rightarrow K \text{ fest}$$

⇒ Gesamtenergie des Auslenkungsfelds:

$$E = T + V = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\rho (\dot{\zeta}(x,t))^2 + k \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m \ddot{\zeta}_n &= - \frac{\partial V}{\partial \zeta_n} = k \zeta_{n-1} - 2k \zeta_n + k \zeta_{n+1} \quad \text{für } n=2, \dots, N-1 \\ &= k \left[(\zeta_{n+1} - \zeta_n) - (\zeta_n - \zeta_{n-1}) \right] \\ &\approx k l \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}((n+1)l, t) - \frac{\partial \zeta}{\partial x}(nl, t) \right] \approx k l^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(nl, t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m}{l}}_{=\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \underbrace{k l}_{=k} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

damit erhalten wir die eindimensionale Wellengleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (*)$$

→ partielle Dgl für das Auslenkungsfeld $\zeta(x,t)$

Lösung der partiellen Dgl: Separation der Variablen

$$\text{Ansatz: } \zeta(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = f(x) \frac{d^2 g}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = g(t) \frac{d^2 f}{dx^2} \rightarrow \text{Einsetzen in } (*)$$

$$\rightarrow \rho f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = k g(t) \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \left| \cdot \frac{1}{f(x)g(t)} \right.$$

$$\underbrace{\rho \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} = \underbrace{k \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2}}_{\text{hängt nicht von } t \text{ ab}}$$

Separationskonstante

das bedeutet: beide Seiten sind unabhängig von x und t , d.h. konstant = α

$$\Rightarrow \rho \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2} = \alpha$$

$$k \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha$$

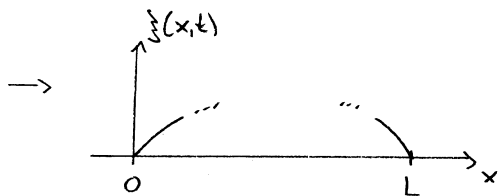
$$(I) \rho \frac{d^2 g}{dt^2} - \alpha g(t) = 0$$

$$(II) k \frac{d^2 f}{dx^2} - \alpha f(x) = 0$$

Zwei gewöhnliche Dgl.

↳ dasselbe α in (I) und (II)!

der 1. Schritt: Lösung von Dgl. (II) für feste Randbedingungen



$$\left. \begin{aligned} \zeta(x=0,t) &= 0 \\ \zeta(x=L,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für alle Zeiten } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x=0) = f(x=L) = 0$$

wähle Ansatz für $f(x)$, da die Randbedingung bei $x=0$ automatisch erfüllt.

$$\rightarrow \boxed{f(x) = \sin(qx)}^{(*)} \quad q \in \mathbb{R}$$

die möglichen q -Werte ergeben sich aus: $f(L) = 0$

$$\rightarrow \sin(qL) = 0 \rightarrow qL = n\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

auch hier: $\cdot n=0$ ergibt nur die triviale Lösung $\zeta(x,t) = 0$

$\cdot n$ und $-n$ ergeben dieselben Lösungen.

$$\Rightarrow \boxed{q_n = \frac{n\pi}{L}} \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad \rightarrow f_n(x) = \sin(q_n x)$$

Einsetzen von $(*)$ in (II) ergibt $-q^2 k \sin(qx) - \alpha \sin(qx) = 0$

$$\rightarrow \alpha = -kq^2 \quad \boxed{\alpha_n = -kq_n^2 = -k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

jetzt zu Dgl. (I):

$$\rho \frac{d^2 g}{dt^2} + k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 g(t) = 0$$

allgemeine Lösung für gegebenes n : $g_n(t) = a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)$

$$\text{mit } \rho \omega_n^2 = k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \frac{n\pi}{L}}$$

damit ergeben sich die folgenden Lösungen der partiellen Dgl:

$$\zeta_n(x,t) = f_n(x) g_n(t) = \sin(q_n x) \left[a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t) \right]$$

jede Linearkombination einer linearen, homogenen, partiellen Dgl. ist ebenfalls eine Lösung von Lösungen.

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } \boxed{\begin{aligned} \zeta(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left[a_n \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}} \frac{n\pi}{L} t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}} \frac{n\pi}{L} t\right) \right] \end{aligned}} \quad (*)$$

mit a_n, b_n festgelegt durch die Anfangsbedingungen

vgl.: Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen

$m \vec{a} = \vec{F} \rightarrow$ die Bahn $\vec{r}(t)$ ist für alle t festgelegt (determiniert) durch die Angabe von $\vec{r}(t=0)$ und $\dot{\vec{r}}(t=0)$

hier: Auslenkung $\zeta(x,t)$ determiniert durch Angabe von

$$\zeta(x,t=0) = h(x) \quad \text{und} \quad \dot{\zeta}(x,t=0) = j(x)$$

$$\zeta(x,t=0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\hat{=}} = h(x)$$

$\hat{=}$ Darstellung der Funktion $h(x)$ als Fourierreihe mit Koeffizienten b_n

$$\dot{\zeta}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \dot{g}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \omega_n [a_n \cos(\omega_n t) - b_n \sin(\omega_n t)]$$

$$\rightarrow \dot{\zeta}(x,t=0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Fourier-Reihe mit Koeffizienten } a_n \omega_n} = j(x)$$

Fourier-Reihe mit Koeffizienten $a_n \omega_n$

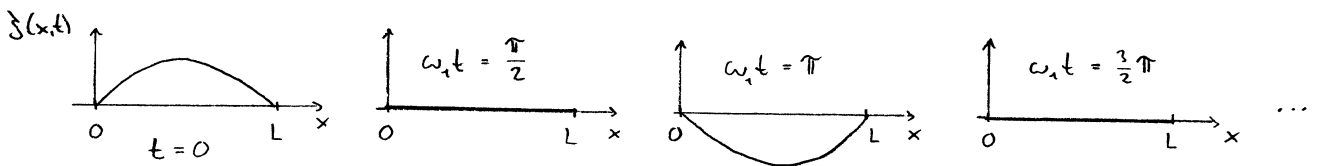
die Strategie ist also:

$h(x), j(x)$ gegeben \rightarrow Berechnung der $a_n, b_n \rightarrow \zeta(x,t)$ folgt aus (*)

einfaches Beispiel: $b_1 = 1$, $b_n = 0$ für $n = 2, 3, \dots, \infty$

$a_n = 0$, $n = 1, \dots, \infty$

$$\rightarrow \zeta(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\rho}} \frac{\pi}{L}t\right)$$



$\rightarrow \zeta(x,t)$ beschreibt eine stehende Welle

jetzt: Lösung der partiellen Dgl. ohne Randbedingungen

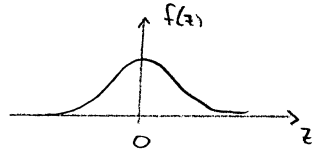
d.h. $\zeta(x,t)$ definiert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{mit } v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

es gilt: das Auslenkungsfeld $\zeta^\pm(x,t) = f(x \pm vt)$ ist eine Lösung der Dgl. für

beliebige Funktionen $f(z)$ ($z \in \mathbb{R}$) (Beweis siehe Übungen)

Beispiel: $f(z) = e^{-z^2}$



→ Maximum bei $z=0$

→ $\psi^\pm(x,t) = e^{-(x \pm vt)^2}$ → Maximum bei $x_m \pm vt = 0$

$$x_m = \mp vt$$

das bedeutet: Wellenpaket bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v nach links bzw. rechts

allgemeine Lösung: Linearkombination von nach links und rechts laufenden Wellen.

$$\psi(x,t) = f_r(x-vt) + f_e(x+vt) \quad \text{mit beliebigen Funktionen } f_r, f_e$$

B. Elektrodynamik

grundlegende Größen der Elektrodynamik : $\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow$ elektrisches Feld
 $\vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow$ magnetisches Feld

Quellen diese Felde : $\rho(\vec{r}, t) \rightarrow$ Ladungsdichte
 $\vec{j}(\vec{r}, t) \rightarrow$ Stromdichte

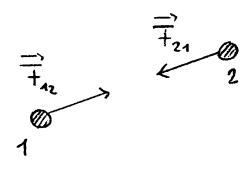
Grundgleichungen der Elektrodynamik : Maxwell-Gleichungen \rightarrow Kap. B.3
 \hookrightarrow vier gekoppelte, partielle Dgl. für $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$

im statischen Fall, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} \dots = 0$

\rightarrow Aufteilung in $\begin{cases} \text{zwei Dgl. für } \vec{E}(\vec{r}) : \text{Elektrostatik Kap. B.1} \\ \text{zwei Dgl. für } \vec{B}(\vec{r}) : \text{Magnetostatik Kap. B.2} \end{cases}$

B.1. Elektrostatik

betrachte zwei Punktladungen am Ort $\vec{r}_{1/2}$
 mit Ladung $q_{1/2}$



für die Kraft \vec{F}_{12} auf die Punktladung 1
 gilt das Coulomb-Gesetz :

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Eigenschaften :

- \rightarrow Coulomb-Kraft ist eine Zentralkraft mit $f(r) = k q_1 q_2 \frac{1}{r^2}$ (siehe Kap. A.1)
- $\rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (3. Newtonsches Axiom)
- $\rightarrow q_1 q_2 > 0$ abstoßende Kraft
- $q_1 q_2 < 0$ anziehende Kraft

Wahl des Einheitensystems

symbolisch : $[\dots]$: Einheit von ...

$$\rightarrow \underbrace{[\text{Kraft}]}_{= N} = [k q_1 q_2] \cdot \underbrace{[\frac{1}{r^2}]}_{= \frac{1}{m^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{[k q_1 q_2]}_{= [k][q]^2} = N m^2$$

d.h. Aufteilung nach $[k]$ und $[q]$ nicht eindeutig

Gauß-System : $k = 1$
 $\rightarrow [k] = 1$

alternativ: SI-System $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \frac{Nc^2}{A^2}$

ϵ_0 : Dielektrizitätskonstante des Vakuums

das elektrische Feld

jetzt: N Punktladungen q_1, \dots, q_N an den Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$

\rightarrow Kraft \vec{F} auf eine weitere Ladung q am Ort \vec{r}

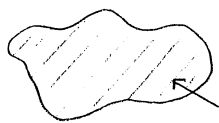
$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} =: q \vec{E}(\vec{r})$$

d.h.: Definition des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ eine Ladungsverteilung über die Kraft \vec{F} eine „Probeladung“ q

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \vec{E}(\vec{r}) \text{ ist ein Vektorfeld}$$

\rightarrow elektrisches Feld für eine kontinuierliche Ladungsverteilung:

• \leftarrow Probeladung am Ort \vec{r}



Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (*)$$

$\int d^3r$: Volumenintegral $\int_V d^3r \rho(\vec{r}) = Q$: die im Volumen V enthaltene Ladung

\rightarrow Ladungsdichte einer diskreten Ladungsverteilung

$$\text{wie oben: } N \text{ Punktladungen} \rightarrow \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

mit $\delta(\vec{r})$ der dreidimensionalen δ -Funktion

$$\delta(\vec{r}) \equiv \delta^3(\vec{r}) := \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

$$\text{Eigenschaften: } \int d^3r \delta^3(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) = 1$$

$$\int d^3r A(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = A(\vec{r}')$$

Einsetzen dieser $\rho(\vec{r})$ in (*):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

$$= \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\int d^3 r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \frac{\vec{r}' - \vec{r}_i}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|^3}}_{= \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}} \quad \checkmark$$

das elektrostatische Potential

es gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ (siehe Übungen)

→ es existiert ein skalares Potential $\Phi(\vec{r})$ (das elektrostatische Potential)

mit :
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$$

und es gilt :
$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
 in den Übungen : $-\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = \dots$

Quellen des elektrischen Feldes

$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$: Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$ entspricht dem Quellenfeld von $\vec{E}(\vec{r})$

es gilt : $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$

Beweis :
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\stackrel{!}{=} 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \quad (\text{Beweis siehe Übungen}) \\ &= 4\pi \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi \rho(\vec{r}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

damit folgen die Grundgleichungen der Elektrostatik für das elektrische Feld :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

Poisson-Gleichung :

bilde
$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}))}_{= \Delta \Phi} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

= $\Delta \Phi$ mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

⇒
$$\boxed{\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})} \rightarrow \text{Poisson-Gleichung}$$

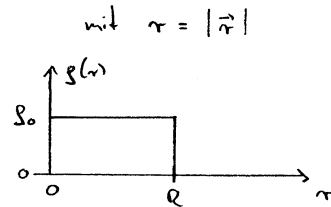
das Grundproblem der Elektrostatik:

gegeben: Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

gesucht: $\vec{E}(\vec{r})$ oder $\Phi(\vec{r})$

Beispiel: Feld einer homogen geladenen Kugel (Radius R)

$$\text{Ladungsdichte } \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : 0 \leq r \leq R \\ 0 & : r > R \end{cases}$$



→ Beschreibung des Problems in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

das elektrostatische Potential: $\Phi = \Phi(r)$

→ unabhängig von ϑ und φ

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(r) = \underbrace{-\Phi'(r)}_{=E(r)} \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r \quad \text{mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Berechnung von $E(r)$ mit Hilfe des Gauß'schen Satzes:

$$\oint_{F_v} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=4\pi\rho(r)} \quad \text{mit } V: \text{Volumen einer Kugel mit Radius } r \text{ um } \vec{0}$$

linke Seite: auf der Fläche F_v gilt $\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{E(r)}_{=const} \vec{e}_r$ und $\vec{E} \parallel d\vec{f}$

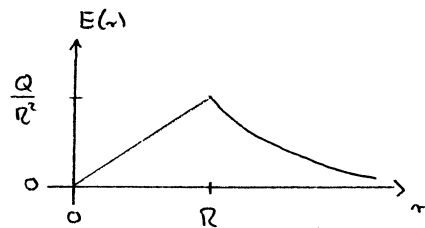
$$\Rightarrow \oint_{F_v} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E(r) F_v = E(r) 4\pi r^2$$

rechte Seite:

$$= 4\pi \int_V dV \rho(r) = \begin{cases} 4\pi Q & : r > R \\ 4\pi Q \frac{r^3}{R^3} & : 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

mit $Q = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & : r > R \\ Q \frac{r}{R^3} & : 0 \leq r \leq R \end{cases}$$



die elektrostatische Energie

potentielle Energie eines Systems aus N wechselwirkenden Massenpunkten:

$$V = \sum_{i,j} (i < j) V_{ij} \quad \text{hier: } V_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

→ die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte Kraft:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = q_i q_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \leftarrow \text{Coulomb-Kraft}$$

schreibe $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ davon ausgehend: Übergang zum Kontinuum

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad [\vec{r} = \vec{r}' \text{ bei Integration ausgenommen}]$$

↳ Wechselwirkungsenergie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit sich selbst

$$\begin{aligned} \rightarrow V &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \Phi(\vec{r})} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = \dots \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \Phi(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\dots = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r [\Delta \Phi(\vec{r})] \Phi(\vec{r}) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{8\pi} \int d^3r \underbrace{|\vec{\nabla} \Phi|^2}_{= |\vec{E}(\vec{r})|^2}$$

partielle Integration

$$\Rightarrow V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

Def.: $u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{r})|^2$ Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\Rightarrow V = \int d^3r u(\vec{r})$$

Beispiel: elektrostatische Energie der homogen geladenen Kugel

$$\text{Energiedichte: } u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} E(r)^2 = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4} & : r > R \\ \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2 r^2}{R^6} & : 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

↓
hängt nur von r ab → $u(r)$

gesamte elektrostatische Energie:

$$V = \int d^3r u(r) \rightarrow \text{Auswertung des Volumenintegrals in Kugelkoordinaten } r, \vartheta, \varphi$$

$$\text{es gilt: } \int_V d^3r a(r, \vartheta, \varphi) = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi a(r, \vartheta, \varphi)$$

↳ Volumen einer Kugel mit Radius R_0

speziell für $a=1$: $\int_V d^3r = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} R_0^3 \pi \checkmark$

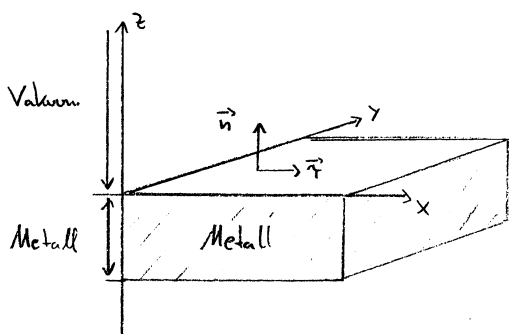
$$= \frac{1}{3} R_0^3 = 2 = 2\pi$$

hier : $V = \int_0^\infty dr r^2 u(r) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$

$$= 4\pi \frac{Q^2}{8\pi} \left[\int_0^R dr \frac{r^4}{R^5} + \int_R^\infty dr \frac{1}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \left[\frac{1}{R^6} \frac{1}{5} [r^5]_0^R - \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} \rightarrow \text{divergiert für } R \rightarrow 0$$

elektrostatische Randbedingungen



betrachte die Grenzfläche zwischen einem metallischen Leiter und dem Vakuum

gesucht: Randbedingungen für $\vec{E}(\vec{r})$ an der Grenzfläche

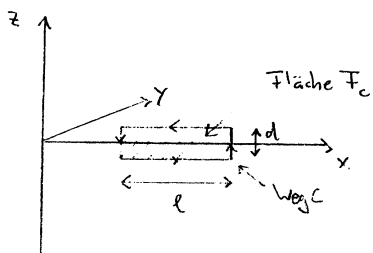
im Metall: frei bewegliche Ladungen

\Rightarrow es muss gelten $\vec{E}_1 = \vec{0}$ bzw. $\Phi_1 = \text{const.}$

denn: falls $\vec{E}_1 \neq \vec{0} \rightarrow$ auf die Ladungen wirken Kräfte

\Rightarrow Verschiebung der Ladungen solange bis $\vec{E}_1 = \vec{0}$

a) tangentielle Randbedingungen



C : geschlossener Weg, der die Grenzfläche umschließt

$d \ll l$

Stokes'scher Satz für das elektrische Feld : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{F_c} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{F} = 0$

Auswertung des Linienintegrals :

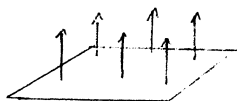
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = l \vec{E}_1 \cdot \vec{r} - l \vec{E}_2 \cdot \vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

\vec{E}_1, \vec{E}_2 auf Integrationsweg konstant

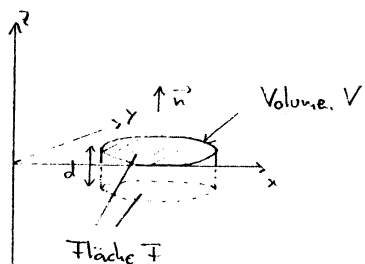
$$\rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{E}_1 = \vec{\gamma} \cdot \vec{E}_2$$

d.h.: • die Tangentialkomponente $\vec{\gamma} \cdot \vec{E}$ ist stetig

• $\vec{E}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{E}_2 = 0 \rightarrow$ die Feldlinien stehen \perp auf der Oberfläche des Leiters



b₂ normale Randbedingungen



Gauß'scher Satz:

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{= 4\pi \rho(\vec{r})} = 4\pi \underbrace{\int_V dV \rho(\vec{r})}_{= q}$$

q: die in V enthaltene Ladung

Auswertung des Flächenintegrals:

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{f} \underset{\lim d \rightarrow 0}{=} \int_{F_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{f} = \vec{E}_1 \cdot \vec{F}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{F}_2$$

\vec{E}_1, \vec{E}_2 auf Integrationsfläche konstant

$$\vec{F}_1 = -\vec{n} F, \quad \vec{F}_2 = \vec{n} F$$

$$\Rightarrow \oint_V \vec{E} \cdot d\vec{f} = F (\vec{n} \cdot \vec{E}_2 - \vec{n} \cdot \vec{E}_1) \stackrel{!}{=} 4\pi q$$

Def.: Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{q}{F}$$

und damit

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_2 - \vec{n} \cdot \vec{E}_1 = 4\pi \sigma$$

d.h.: die Normalkomponente $\vec{n} \cdot \vec{E}$ springt an der Oberfläche um $4\pi \sigma$

$$\vec{E}_1 = 0 \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{E}_2 = 4\pi \sigma$$

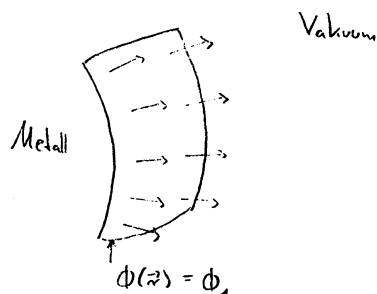
Zusammenhang mit den Randbedingungen für das Potential:

Für ein skalares Feld $\Phi(\vec{r})$ gilt:

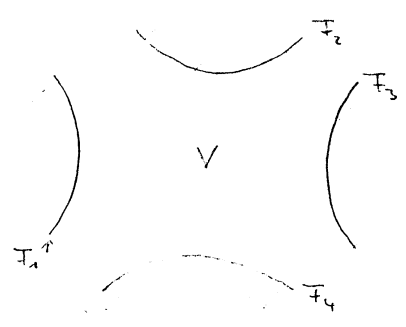
$\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$ steht \perp auf den Flächen mit $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$

hier: Oberfläche des Metalls = Äquipotentialfläche

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \Phi_1 = \text{const.}$$



allgemeine Formulierung des Randwertproblems



- gegeben:
- Volumen V , begrenzt durch (getrennte) Metallflächen F_i
 - Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in V
 - Randbedingungen $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r} \in F_i} = \Phi_i$

sei $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \dots$ Dirichlet - Randbedingung $\Phi(\vec{r})|_{\vec{r} \in F} = \Phi_0(\vec{r})$

das Randwertproblem lautet also:

$\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$	für $\vec{r} \in V$	→ Poisson - Gleichung
$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r})$	für $\vec{r} \in F$	→ Dirichlet - Randbedingung

aus der Lösung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ folgt:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \quad \vec{r} \in F$$

↳ Normalenvektor auf der Oberfläche

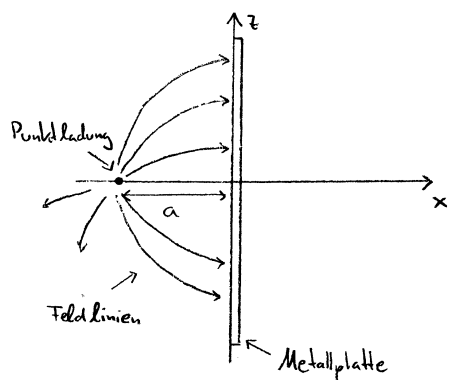
→ Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ($\vec{r} \in V$) induziert Ladungsverteilung $\sigma(\vec{r})$ ($\vec{r} \in F$) auf den (Metall-) Oberflächen

alternative Formulierung des Randwertproblems

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$	für $\vec{r} \in V$	→ Neumannsche Randbedingung
$\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \sigma(\vec{r})$	für $\vec{r} \in F$	

d.h.: die Oberflächenladungsdichte (und damit die Normalkomponente des elektrischen Feldes) ist vorgegeben

Beispiel für ein Randwertproblem



- Volumen $V = \{ \vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0 \}$
- Oberfläche des Metalls

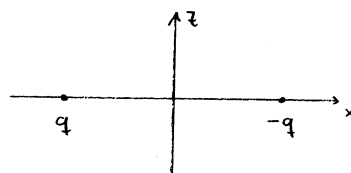
$$\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$$
- Ladungsdichte in V : $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{a})$
 mit $\vec{a} = (-a, 0, 0)$
 d.h. Punktladung am Ort \vec{a}

Dirichlet - Randbedingung: $\Phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in \Gamma$

→ Lösung des Problems mit Hilfe der Bildladungsmethode

betrachte folgendes Problem:

- Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{a}) - q \delta(\vec{r} + \vec{a})$
 d.h. zusätzliche Ladung $-q$ bei $-\vec{a}$
- keine Randbedingungen



Potential für dieses Problem:

$$\Phi_0(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho_0(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - q \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|}$$

Behauptung:

das Potential $\Phi_0(\vec{r})$ löst das Randwertproblem

zu zeigen ist:

1. $\Delta \Phi_0(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$

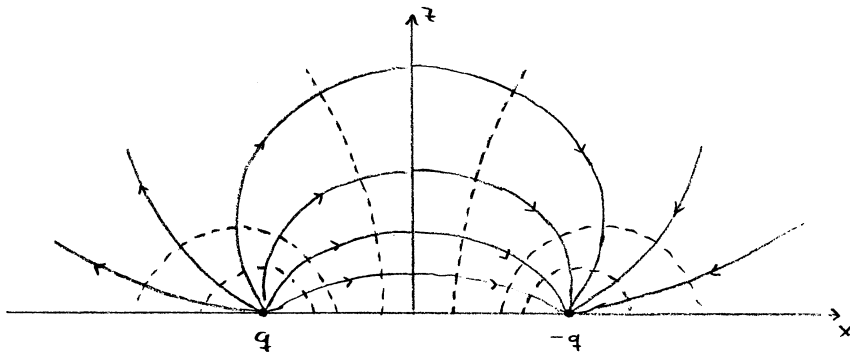
ist erfüllt, da
$$\Delta \Phi_0(\vec{r}) = -4\pi \rho_0(\vec{r}) = -4\pi \left[\underbrace{q \delta(\vec{r} - \vec{a})}_{= \rho(\vec{r})} - \underbrace{q \delta(\vec{r} + \vec{a})}_{= 0 \text{ für } \vec{r} \in V} \right] \quad \checkmark$$

2. $\Phi_0(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in \Gamma$

setze $\vec{r} = (0, y, z) \rightarrow \vec{r} \pm \vec{a} = (\pm a, y, z), |\vec{r} \pm \vec{a}| = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \Phi_0(\vec{r} = (0, y, z)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} (q - q) = 0 \quad \checkmark$$

→ Darstellung der Feldlinien ($\vec{E}(\vec{r})$) und Äquipotentialflächen ($\Phi_0(\vec{r}) = \text{const.}$) für $y=0$



Für das elektrische Feld folgt damit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_0(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - q \frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3}$$

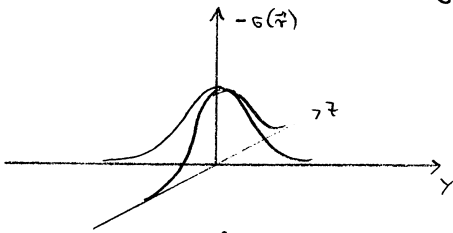
$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}=(0,y,z)) = \frac{q}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left[\begin{pmatrix} a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \frac{q}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das bedeutet: $\vec{r} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow$ die Feldlinien stehen \perp auf der Metallplatte

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = -\frac{2aq}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \rightarrow \text{damit folgt für die Oberflächenladungsdichte:}$$

\vec{n} zeigt in $-x$ -Richtung

$$\sigma(\vec{r}) = -\frac{aq}{2\pi} (a^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$



\rightarrow maximal bei $y=z=0$

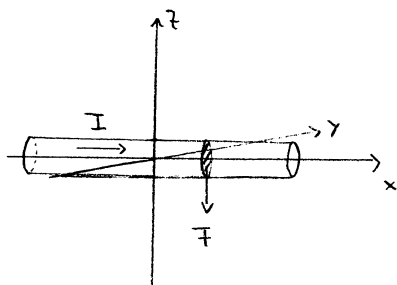
Gesamtladung auf der Metallplatte: $q_{\text{infl}} = \int_{-a}^a dy \int_{-a}^a dz \sigma(\vec{r}) = -q$
 \hookrightarrow "Influenzladung"

B.2 Magnetostatik

Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t) \Rightarrow$ elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \rho(\vec{r},t)$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t) \Rightarrow$ magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ mit ?

Zunächst: Definition der Stromdichte



\rightarrow Strom durch einen Draht mit Querschnittsfläche $F = R^2\pi$

$$\Rightarrow \text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}, \quad I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

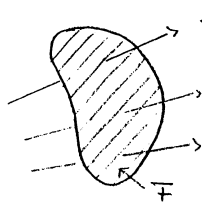
Stromdichte = $\frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}}$, $j = \frac{I}{F}$

Richtung des Stroms: hier $\rightarrow \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j} = j \vec{e}_x$

\rightarrow die Stromdichte ist ein Vektorfeld

hier: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} j \vec{e}_x & : y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$
 ↓
 stationärer Strom

\rightarrow Berechnung des Stroms durch eine Fläche F für ein gegebenes $\vec{j}(\vec{r}, t)$



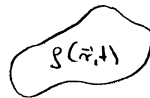
$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$ Flächenintegral

speziell für $\vec{j} \parallel \vec{F}$, \vec{j} auf der Fläche konstant

$\Rightarrow I = \vec{j} \cdot \vec{F} = j F \quad \checkmark$

Strom = bewegte Ladung

gegeben: Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$



Annahme: die Bewegung der Ladungsverteilung wird durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ beschrieben

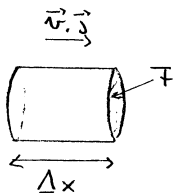
dann gilt: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (*)$

Beispiel: Strom durch einen Draht (wie oben)

$\rho(\vec{r}, t) = \begin{cases} \rho_0 & : y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ und $\vec{v}(\vec{r}, t) = v \vec{e}_x = \text{const}$

$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 v \vec{e}_x & : y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow j = \rho_0 v$

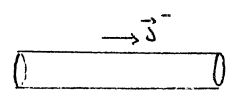
und damit $I = j F = \rho_0 v F = \rho_0 \underbrace{\Delta x F}_{\Delta V} \frac{1}{\Delta t} = \underbrace{\rho_0 \Delta V}_{\Delta q} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$
 $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \Delta v$



Δq : die im Volumen ΔV enthaltene Ladung
 = die Ladung, die in der Zeit Δt die Fläche F durchströmt

Gl. (*) gilt nicht, falls ...

Beispiel: metallische Draht



$$\rho(\vec{r}, t) = \rho^+(\vec{r}, t) + \rho^-(\vec{r}, t) = 0$$

Ladungsdichten der positiven/negativen Ladungen

es gilt: $\vec{v}^+(\vec{r}, t) = \vec{0}$: die positiven Ladungen ruhen

$$\vec{v}^-(\vec{r}, t) = \vec{v}^- \neq \vec{0}$$

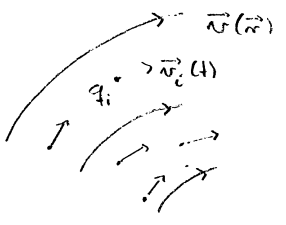
$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t) &= \underbrace{\vec{j}^+(\vec{r}, t)} + \underbrace{\vec{j}^-(\vec{r}, t)} \neq \underbrace{\rho(\vec{r}, t)} \cdot \underbrace{\vec{v}(\vec{r}, t)} = \vec{0} \\ &= \rho^+(\vec{r}, t) \vec{v}^+ = \rho^-(\vec{r}, t) \vec{v}^- = 0 \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Stromdichte eine diskreten Ladungsverteilung

Ausgangspunkt: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r})$ (stationäres Geschwindigkeitsfeld)

mit $\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$

↳ beschreibt Punktladungen q_i an den Orten $\vec{r}_i(t)$



$$\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) \stackrel{!}{=} \vec{v}(\vec{r}_i(t))$$

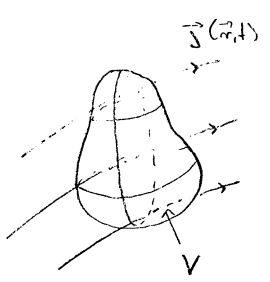
d.h. alle Punktladungen bewegen sich in einem Geschwindigkeitsfeld

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\vec{v}(\vec{r})}_{\vec{v}(\vec{r}_i(t))} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ &= \vec{v}(\vec{r}_i(t)) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}$$

Kontinuitätsgleichung



→ Strom I durch Oberfläche F_c des Volumens V

es gilt:

$$I = \oint_{F_c} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{F} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{\text{Gauß'scher Satz}}$$

außerdem : $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ mit $\Delta q = - (q(t+\Delta t) - q(t))$

mit $q(t)$ die im Volumen V zur Zeit t enthaltene Ladung (Vorzeichen)

$\rightarrow q(t) = \int_V dV \rho(\vec{r}, t)$

$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = - \int_V dV \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\rho(\vec{r}, t+\Delta t) - \rho(\vec{r}, t)]$
 $= \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$

und damit : $\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = - \int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$

gilt für beliebige $V \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0}$ Kontinuitätsgleichung

im statischen Fall : $\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$

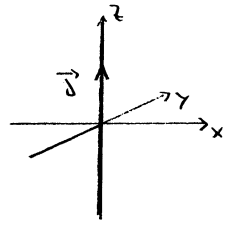
Magnetfeld

eine stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ erzeugt ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ gemäß :

$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$ (*)

Beispiel : Magnetfeld eines (unendlich dünnen) Drahts mit der Stromdichte

$\vec{j}(\vec{r}) = j \delta(x) \delta(y) \vec{e}_z$



Einsetzen in (*) :

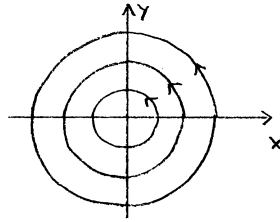
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \delta(x') \delta(y') \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$
 $= \begin{pmatrix} -j \delta(x') \delta(y') (y-y') \\ j \delta(x') \delta(y') (x-x') \\ 0 \end{pmatrix}$
 $= \frac{j}{c} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \dots$

verwende Zylinderkoordinaten $\rho, \varphi, z \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \vec{e}_\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\dots = \frac{j}{c} \rho \vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad \text{Substitution: } z'' = z - z'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz'' \frac{1}{[\rho^2 + z''^2]^{3/2}} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{z''}{[\rho^2 + z''^2]^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2j}{c} \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}}$$



→ Feldlinien sind Kreise um die z-Achse

Kraft auf eine Punktladung

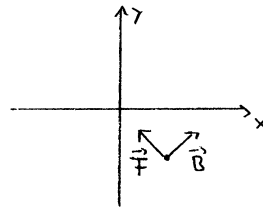
betrachte Punktladung q_i am Ort \vec{r}_i , Geschwindigkeit \vec{v}_i , im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}_i)$

→ Kraft auf die Punktladung

$$\boxed{\vec{F}_i = \frac{1}{c} q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)}$$

Beispiel: $\vec{B}(\vec{r}) = \alpha \vec{e}_\varphi, \quad \vec{v}_i = v \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{F}_i = \frac{\alpha}{c} q_i v \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi}_{= -\vec{e}_\rho}$$



Vektorpotential

ausgehend von Gl. (*) für $\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow$ es gilt $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{= -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

folgt aus $\vec{\nabla} \times (\vec{a} f(\vec{r})) = -\vec{a} \times \vec{\nabla} f(\vec{r})$

$$= \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \left[\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

mit dem Vektorpotential

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})}$$

mit $\Lambda(\vec{r})$ einem beliebigen skalaren Feld

→ der Term $\vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})$ trägt nicht zu $\vec{B}(\vec{r})$ bei, da $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})) = \vec{0}$

d.h.: das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld bestimmt!

Festlegung von $\vec{A}(\vec{r})$ bzw. $\Lambda(\vec{r}) =$ Eichung

• Eichtransformation: $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})$

Beispiel: Coulombgleichung

→ setze $\Lambda(\vec{r}) = 0$, diese Wahl führt zu $\boxed{\operatorname{div} \vec{A}'(\vec{r}) = 0}$

$$\begin{aligned} \text{denn: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{= \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}))}_{= \Delta \Lambda(\vec{r}) = 0 \text{ wegen } \Lambda(\vec{r}) = 0} = \dots \\ &= \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

$$\text{es gilt: } \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\dots = - \frac{1}{c} \int d^3 r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{partielle Integration}}$$

$$\text{partielle Integration: } = \underbrace{\oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}}_{\text{verschwindet, falls } \vec{j}(\vec{r}') \text{ auf}} - \int d^3 r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{= 0}$$

verschwindet, falls $\vec{j}(\vec{r}')$ auf
endliches Raumgebiet beschränkt

Grundgleichungen der Magnetostatik

• Divergenz des Magnetfelds:

$$\text{aus } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \text{ folgt } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = 0$$

→ Wirbelfelder sind quellenfrei

• Rotation des Magnetfelds:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \dots$$

verwende die Coulombgleichung für das Vektorpotential:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

$$\rightarrow \Lambda(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\dots = - \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \dots$$

$$\begin{aligned} \text{es gilt: } \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \\ &= -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (\text{siehe Übungen}) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{4\pi}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

damit folgt für die Grundgleichungen der Magnetostatik:

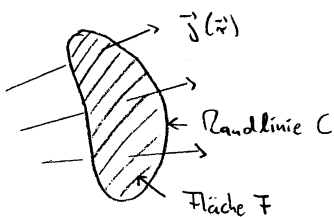
$$\begin{array}{|l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{array} \quad \rightarrow \text{es gibt keine magnetischen Monopole}$$

alternativ: Grundgleichung für das Vektorpotential

$$\text{in der Coulombbeziehung gilt: } \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = -\Delta \vec{A}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})} \quad \text{das Magnetfeld folgt dann aus } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

Ampère-Gesetz



$$\text{es gilt } \boxed{I_{\mp} = \frac{c}{4\pi} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}}$$

d.h. Strom durch die Fläche F = Linienintegral über den Rand der Fläche

$$\begin{aligned} \text{folgt aus: } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \int_F \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{F}}_{\substack{\text{Stokes} \\ = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})}} = \frac{4\pi}{c} \int_F \underbrace{\vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}}_{= I_{\mp}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

B.3 Maxwellgleichungen

aus den Grundgleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik folgt:

→ keine Kopplung zwischen $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$

↳ gilt nicht mehr für zeitabhängige Vorgänge

⇒ Verallgemeinerung der Feldgleichungen

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 4\pi \rho(\vec{r}, t) & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

→ Grundgleichungen der Elektrodynamik

außerdem: Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$$

→ Kraft auf eine Punktladung q am Ort \vec{r} , Geschwindigkeit \vec{v} ,
im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Diskussion der Zusatzterme

1. $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$: Induktion

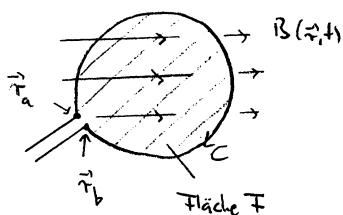
Maxwell-Gleichung: $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad \left| \int_{\mathcal{F}} d\vec{F} \cdot \dots \right.$

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) \cdot d\vec{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{F}} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{F}$$

$$= \oint_{\text{Stokes}} \frac{1}{c} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$$

$$= \Phi_{\mathcal{F}}(t) : \text{magnetische Fluss durch die Fläche } \mathcal{F}$$

Weg $C \rightarrow$ Drahtschleife



$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)) = U$$

U : Spannung zwischen den Punkten \vec{r}_a und \vec{r}_b

⇒ Faradaysches Induktionsgesetz

$$U = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\mathcal{F}}}{dt}$$

d.h. die zeitliche Änderung des Flusses durch die Drahtschleife induziert eine Spannung

↳ - Änderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$

oder: - Bewegung der Schleife

2. $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$: Verschiebungsstrom

folgt aus der Konsistenz der Maxwellgleichungen mit der Kontinuitätsgleichung

Schreibe:
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (*)$$

zu zeigen:
$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

→ bilde $\vec{\nabla} \cdot (*)$:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}_{=0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{= -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \leftarrow \text{Kontinuitätsgleichung}}$$

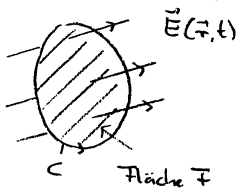
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \leftarrow \text{Maxwell-Gleichung}$$

und damit
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \right]$$

identisch (bis auf ein Wirbelfeld)

experimentelle Begründung des Zusatzterms

Maxwell-Gleichung für $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0}$:
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$$



zeitliche Änderung der elektrischen Flüsse erzeugt ein Magnetfeld

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_F^{el}(t)$$