Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 27.04.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: Newton'sche Bewegungsgleichung für N-Teilchen-System

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen (Massenpunkten mit Massen m_i, $i = 1, \ldots N$), die über die Gravitationskraft miteinander wechselwirken. Zusätzlich befinden sich die Teilchen in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}_e(\vec{r})$.

a) Wie lauten die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen?

b) Setzen Sie nun $\vec{F}_e(\vec{r}) = 0$. Zeigen Sie, dass innere Kräfte ein System aus Massenpunkten (das oben definierte N-Teilchen-System) nicht beschleunigen können. Betrachten Sie dazu die zweite zeitliche Ableitung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ mit

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Galilei-Transformation, Galilei-Invarianz

a) Zeigen Sie, dass das 2. Newton'sche Axiom bei Anwesenheit von Reibungskräften nicht invariant ist unter Galilei-Transformationen.

b) Die Galilei-Transformationen

$$\hat{G} : (\vec{r}, t) \to (\vec{r}\,', t') = (\hat{D}\vec{r} + \vec{r}_0 - \vec{\omega} t, t + t_0)$$

bilden eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung zweier Transformationen $\hat{G}_1$ und $\hat{G}_2$ ein Element der Galilei-Gruppe ist und geben Sie die definierenden Größen der resultierenden Transformation, d.h. $\hat{D}$, $\vec{r}_0$, $\vec{\omega}$ und t_0, an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Krummlinige Koordinaten

a) Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A} = \vec{b} \times \vec{r}$ mit $\vec{b} = (0, 0, b)$. Zerlegen Sie dieses Vektorfeld nach dem lokalen Dreibein von Zylinderkoordinaten.

b) Ein Körper der Masse m befindet sich in einem Zentralkraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$, wobei die Bewegung auf die x-y-Ebene eingeschränkt ist. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten r und φ? Lösen Sie diese Differentialgleichungen für den Spezialfall einer Kreisbahn mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(t = 0) = (R, 0)$. Warum ergibt sich bei der Lösung ein Unterschied zwischen anziehenden und abstoßenden Kräften?

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist gegeben durch

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ ein lokales Dreibein bilden, d.h. jeweils orthogonal aufeinander stehen.

c) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ in Kugelkoordinaten und formulieren Sie damit die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Zentralkraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$.

(7 Punkte)