Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

**Blatt 8**: Abgabetermin: Dienstag, der 29.06.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

## Aufgabe 1: eindimensionale Wellengleichung

Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) \ , \tag{1}$$

sowie eine beliebige (mindestens zweimal differenzierbare) Funktion $f(z)$ $(z \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\xi^{\pm}(x,t) = f(x \pm vt) \ ,$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind.

(3 Punkte)

## Aufgabe 2: partielle Differentialgleichung: Separation der Variablen

Gegeben seien folgende partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + y\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & = & 0 \ , \\ \text{(II)} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z} + z\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} & = & 0 \ . \end{array}$$

Führen Sie mit Hilfe eines jeweils geeigneten Ansatzes eine Separation der Variablen durch. Auf welche gewöhnlichen Differentialgleichungen führt diese Separation jeweils?

(4 Punkte)

**Aufgabe 3: zweidimensionale Wellengleichung**

Die zweidimensionale Wellengleichung hat die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,y,t)\ . \tag{2}$$

Lösen Sie diese partielle Differentialgleichung für die Funktion $\psi(x,y,t)$ mit Hilfe der Separation der Variablen. Die $(x,y)$-Werte sind dabei auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ und $0 \leq y \leq L$ eingeschränkt, und die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\psi(x=0,y,t) &= \psi(x=L,y,t) = 0\ , \quad 0 \leq y \leq L\ , t \in \mathbb{R}\ , \\
\psi(x,y=0,t) &= \psi(x,y=L,t) = 0\ , \quad 0 \leq x \leq L\ , t \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

Wie lautet die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2), die diese Randbedingungen erfüllt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4: eindimensionale Wellengleichung: Anfangsbedingungen**

In der Vorlesung wurde bereits die allgemeine Lösung der Auslenkung $\xi(x,t)$ für die eindimensionale Wellengleichung mit den Randbedingungen $\xi(x=0,t) = \xi(x=L,t) = 0$ angegeben:

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \sin\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right)\right]\ .$$

Gesucht ist die Lösung $\xi(x,t)$ für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
\xi(x,t=0) &= h(x) = \delta(x-\frac{1}{2}L) \ \text{ mit } h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ , \\
\dot{\xi}(x,t=0) &= 0\ .
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Koeffizienten der Fourierreihe von $h(x)$ gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) h(x)$$

b) Berechnen Sie damit die $b_n$ für die gegebenen Anfangsbedingungen und geben Sie die volle Zeitabhängigkeit von $\xi(x,t)$ an.

(6 Punkte)