Übungsaufgaben zur Vorlesung

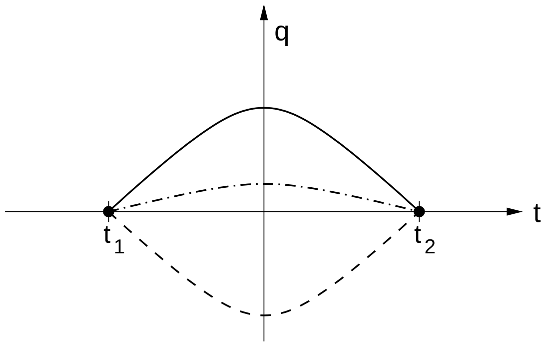
Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt XIV: Abgabetermin: Dienstag, 01.02.2011, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 46: Hamiltonsches Prinzip



Gegeben sei die Lagrangefunktion für die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts (Masse m) im Potential $U(q) = mgq$. Die Randbedingungen für die Bahn $q(t)$ sind $q(t_1) = q(t_2) = 0$, mit $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

a) Geben Sie für dieses System die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ und das Wirkungsfunktional $S[q]$ an.

Wie in der Abbildung gezeigt, sollen Bahnen der folgenden Form betrachtet werden

$$q(t) = at^2 + bt + c \; . \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie zunächst die Werte der Parameter a, b und c, die mit den Randbedingungen verträglich sind. Berechnen Sie damit das Wirkungsfunktional. Für welche durch Gl. (1) parametrisierte Bahn ist $S[q]$ minimal?

c) Wie lautet allgemein der Zusammenhang zwischen der Variation des Wirkungsfunktionals und der Lagrangegleichungen 2. Art? Was folgt daraus für die in b) berechnete Bahn $q(t)$?

(6 Punkte)

Aufgabe 47: Extrema unter Nebenbedingungen

Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$$

auf dem Kreis in der x, y-Ebene mit Radius R.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren λ_i das Minimum der Funktion
$$f^*(x, y) = f(x, y) - \sum_i \lambda_i g_i(x, y).$$
Hierbei sind die g_i geeignete Nebenbedingungen.

b) Im Folgenden wird der Kreis direkt mit Hilfe eines einzigen Parameters $t \in (0, 2\pi)$ durch
$$B_R = \left\{ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \middle| t \in (0, 2\pi) \right\}$$
parametrisiert. Setzen Sie diese Parametrisierung in die Funktion $f(x, y)$ ein um zu einer Funktion $\widetilde{f}(t)$ in Abhängigkeit dieses Parameters t zu gelangen. Bestimmen Sie nun das Minimum der Funktion $\widetilde{f}(t)$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a) übereinstimmt.

(6 Punkte)