Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, Dr. T. Rindler-Daller

WS 2008/09

Blatt VI: Abgabetermin: 25.11.2008, 10:00

Aufgabe 19: hyperbolische Bewegung

Die relativistische Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{F} \ .$$

Lösen Sie diese Gleichung unter der Annahme einer konstanten Kraft in x-Richtung, $F = mg$ mit konstanter Beschleunigung g, d.h. bestimmen Sie $v(t) = dx/dt$ und $x(t)$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 0, x(0) = 0$. Worauf reduzieren sich die Ausdrücke im nichtrelativistischen und ultrarelativistischen Grenzfall? Skizzieren Sie $v(t)$ und $x(t)$ und diskutieren Sie das Resultat.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: Lorentztransformation für eine beliebige Richtung von $\vec{v}$

Ein Inertialsystem IS′ bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit $\vec{v}$. Die Achsen von IS und IS′ sind parallel, die Richtung von $\vec{v}$ ist jedoch beliebig. Die zugehörige Lorentztransformation $\Lambda(\vec{v})$ lässt sich folgendermaßen konstruieren: zunächst wird mit Hilfe einer orthogonalen Matrix α die x-Achse von IS in Richtung von $\vec{v}$ gedreht, anschließend wird die spezielle Lorentztransformation $\Lambda(v)$ mit $v = |\vec{v}|$ in die neue x-Richtung durchgeführt, und schließlich wird die Drehung mit Hilfe der Matrix α^{T} wieder rückgängig gemacht.

Zeigen Sie, dass diese Abfolge von Transformationen auf das folgende Ergebnis führt:

$$\Lambda(\vec{v}) = \Lambda(\alpha^{\mathrm{T}})\Lambda(v)\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_1/c & -\gamma v_2/c & -\gamma v_3/c \\ -\gamma v_1/c & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ -\gamma v_2/c & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ -\gamma v_3/c & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad l_{ij} = \delta_{ij} + (\gamma - 1)\frac{v_i v_j}{v^2} \ .$$

Hinweis: die Matrix $\Lambda(\alpha)$ wurde in der Vorlesung angegeben. Beachten Sie, dass die Komponenten der Matrix α gegeben sind durch $\alpha_{ij} = \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j$.

(6 Punkte)

Aufgabe 21: Lorentztensoren (I)

Gegeben sind die Lorentztensoren der Stufe 2, S und T. Zeigen Sie:

a) die Summe $aS^{\alpha\beta} + bT^{\alpha\beta}$, mit a, b reell, ist ebenfalls ein Tensor der Stufe 2.

b) Das Produkt $S^{\alpha_1\beta_1}T^{\alpha_2\beta_2}$ ist ein Tensor der Stufe 4.

Gegeben sind jetzt zwei Lorentzvektoren V und W. Außerdem gelte die Beziehung

$$V^\alpha = T^{\alpha\beta}W_\beta$$

in jedem Inertialsystem.

c) Beweisen Sie, dass dann T ein Lorentztensor ist.

(4 Punkte)

***Aufgabe 22: Lorentztensoren (II)**

a) Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung

$$(\partial^\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) ,$$

sich wie ein Lorentzvektor transformiert.

b) Gegeben sind zwei Lorentzvektoren V und W. Zeigen Sie, dass $V_\alpha W^\alpha$ sich wie ein Lorentzskalar transformiert.

c) Was folgt aus Aufgabe b) für den d'Alembert-Operator?

d) Die erste Zeile des Feldstärketensors F ergibt in jedem IS die Komponenten des elektrischen Felds. Wir definieren jetzt eine Größe

$$(E^\alpha) = -\left(F^{0\alpha}\right) .$$

Zeigen Sie, dass sich (E^α) *nicht* wie ein Lorentzvektor transformiert.

(7 Punkte)