Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, Dr. T. Rindler-Daller

WS 2008/09

Blatt VIII: Abgabetermin: 16.12.2008, 10:00

Aufgabe 26: δ-Funktion I

Berechnen Sie folgende Integrale

a)
$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x) - f(0)\Big)\delta(x)\,\mathrm{d}x \quad ,$$

b)
$$\int_{1}^{2} \cos(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x \quad ,$$

c)
$$\int_{0}^{4\pi} \sin(x)\delta\Big(\cos(x)\Big)\,\mathrm{d}x \quad .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 27: δ-Funktion II

Die δ-Funktion sei als Limes folgender Funktionenfolge gegeben:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ , \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(x)\ \mathrm{d}x \ , \quad \text{mit} \quad \psi(x) = 1 + x^2 \tag{1}$$

durch

i) direkte Auswertung von Gleichung (1).

ii) Berechnung von
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_n(x)\ \mathrm{d}x$$
mit anschließender Limesbildung $\lim_{n\to\infty}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 28: Fourier-Reihe

a) Zeigen Sie, daß für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx) = \delta_{nm} \quad , \quad (n \neq 0) \quad ,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx) = 0 \quad .$$

b) Welche Eigenschaft hat eine Funktion $f(x)$ für dessen Fourier-Reihe gilt:

   i) $a_n = 0$ für jedes n;

   ii) $b_n = 0$ für jedes n.

(2 Punkte)

Aufgabe 29: Faltungstheorem

Die Faltung zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist gegeben durch

$$h(x) := f \star g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte von h gleich dem Produkt der Fouriertransformierten von f und g ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 30: Fouriertransformation der Wellengleichung

Die inhomogene Wellengleichung in nichtkovarianter Form lautet allgemein

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t) = -4\pi Q(\vec{r},t).$$

Die Fouriertransformierte von $\psi(\vec{r},t)$ bezüglich Ort und Zeit sei $\tilde{\psi}(\vec{k},\omega)$. Lösen Sie die Wellengleichung für $\tilde{\psi}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 31: retardierte Potentiale

Bestimmen Sie die retardierten Potentiale $\phi_{ret}(\vec{r},t)$ und $\vec{A}_{ret}(\vec{r},t)$ (siehe Vorlesung) für eine gleichförmig bewegte Punktladung $\vec{r}_0(t) = (vt, 0, 0)$. Berechnen Sie daraus die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$.

(4 Punkte)