

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 11: Abgabetermin: Mittwoch, der 25.01.2017, 10:00

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

(8 Punkte)

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$4 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x(t) = 0 . \quad (1)$$

- a) Geben Sie einen geeigneten Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung an. Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung? (2 Punkte)
- b) Lösen Sie diese algebraische Gleichung und konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (2 Punkte)
- c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$? (1 Punkt)

Die Differentialgleichung wird nun um einen Term erweitert:

$$4 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x(t) = ae^{\omega t} . \quad (2)$$

- d) Zeigen Sie, dass die spezielle Lösung

$$x_s(t) = \frac{a}{4\omega^2 + 2\omega - 2} e^{\omega t}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2) ist. (2 Punkte)

- e) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) ergibt sich aus der Summe der speziellen Lösung $x_s(t)$ und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1). Zeigen Sie, dass diese Summe, also

$$x(t) = x_s(t) + a_1 e^{t/2} + a_2 e^{-t} ,$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

(4 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der allgemeinen Form:

$$y'(x) + \frac{p(x)}{q(y)} = 0 .$$

- a) Leiten Sie mit Hilfe der Separation der Variablen die folgende (implizite) Form für die Lösung $y(x)$ her:

$$Q(y) = -P(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Dabei ist $Q(y)$ eine Stammfunktion zu $q(y)$ und $P(x)$ eine Stammfunktion zu $p(x)$. (2 Punkte)

- b) Betrachten Sie jetzt die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x^2}{y} = 0 .$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Lösungswegs aus Teilaufgabe a) die Lösungen $y(x)$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: eindimensionale Bewegung

(7 Punkte)

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & : |x| \leq \pi/2 , \\ 1 & : |x| > \pi/2 . \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$. (1 Punkt)
- b) Für welche x -Werte liegt eine Ruhelage vor? (2 Punkte)
- c) Für welche Werte der Gesamtenergie E liegt eine gebundene bzw. ungebundene Bewegung vor? (2 Punkte)
- d) Skizzieren Sie die Bahnen $x(t)$ für folgende Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1 : & \quad x(t=0) = -2 , v(t=0) = 1 , \\ 2 : & \quad x(t=0) = -1 , v(t=0) = 0 . \end{aligned} \quad (2 \text{ Punkte})$$