

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 2: Abgabetermin: Mittwoch, der 02.11.2016, 10:00

Aufgabe 1: Kinematik von Massenpunkten

(10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Bahnkurven für die Bewegung eines Massenpunkts in Dimension $d = 2$:

$$\vec{r}_1(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \sin(\omega t) \\ t \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie jeweils die Komponenten $x_i(t)$ und $y_i(t)$ ($i = 1, 2$) sowie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ in der zweidimensionalen Ebene. Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Bahnen für $t > 0$. Das Verhalten für $t < 0$ ergibt sich dann aufgrund der Symmetrie der Bahnkurven ($\vec{r}_i(-t) = \dots$). (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ und die Beschleunigungen $\vec{a}_i(t)$ sowie deren Beträge $v_i(t) = |\vec{v}_i(t)|$ und $a_i(t) = |\vec{a}_i(t)|$. (4 Punkte)

Betrachten Sie jetzt die folgende Bahn in Dimension $d = 3$:

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix}.$$

- c) Skizzieren Sie diese dreidimensionale Bewegung. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Vektoren I

(9 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2,$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

a) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$. (2 Punkte)

b) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$. (1 Punkt)

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 paarweise senkrecht aufeinander stehen. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} die Dreiecksungleichung $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

g) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^3 [(\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{e}_i]$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Vektoren II

(4 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $2\alpha\vec{u} + \frac{1}{4\alpha}(2\vec{v} - 8\alpha^2\vec{u})$ (2 Punkte)

b) $(\alpha + \beta)^2(\vec{u} + \vec{v}) + (\alpha - \beta)^2(\vec{u} - \vec{v}) + (\alpha^2 + \beta^2)(\vec{v} - \vec{u})$ (2 Punkte)

Dabei sind \vec{u} und \vec{v} beliebige Vektoren und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.