

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 4: Abgabetermin: Mittwoch, der 16.11.2016, 10:00

Aufgabe 1: Teilchenbahnen in Kugelkoordinaten

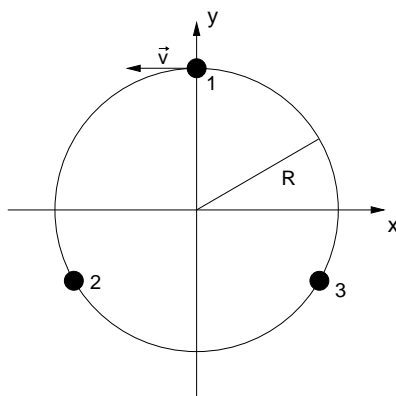
(4 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden, durch $r(t)$, $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$ gegebenen Teilchenbahnen:

- a) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = t$, $\varphi(t) = \pi$, $0 \leq t \leq \pi$. (1 Punkt)
- b) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (1 Punkt)
- c) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sin(t)$, $\varphi(t) = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Drei-Körper-Problem

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen $m_i = m$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v$, die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

- a) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ der drei Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit $t = 0$. (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kraft \vec{F} auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird. Dabei ist die Gravitationskraft gegeben

durch:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} .$$

(2 Punkte)

- c) Wie groß muss v sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius R bleibt? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Integration

(7 Punkte)

- a) Zeigen Sie geometrisch, dass für die folgenden bestimmten Integrale gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \, dx = 0 . \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx = \pi . \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b) Berechnen Sie:

$$\int_0^1 e^x \, dx . \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{n=1}^N x^n \right) dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) \, dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

Hinweis zur Bestimmung der Stammfunktion von $\sin(x) \cos(x)$: Betrachten Sie die Ableitung von $\sin^n(x)$.