

## Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

**Blatt 5:** Abgabetermin: Mittwoch, der 23.11.2016, 10:00

### Aufgabe 1: Newtonsche Dynamik

(6 Punkte)

Ein Körper der Masse  $m$  befindet sich zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $\vec{r}(0) = \vec{0}$ ; für die Geschwindigkeit gilt  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ . Auf den Körper wirkt die folgende zeitabhängige Kraft  $\vec{F}(t)$ :

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} f\vec{e}_x & : 0 < t \leq 1, \\ f\vec{e}_y & : 1 < t \leq 2, \\ -f\vec{e}_x & : 2 < t \leq 3, \\ -f\vec{e}_y & : 3 < t \leq 4, \\ \vec{0} & : t > 4. \end{cases}$$

( $f > 0$ ;  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  sind die Einheitsvektoren in  $x$  bzw.  $y$ -Richtung.) Berechnen Sie  $\vec{r}(t)$  und  $\vec{v}(t)$  und skizzieren Sie die Bahnkurve.

### Aufgabe 2: Integration

(6 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^{\ln 2} \sinh(x) \, dx, \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^3} \, dx, \quad \int_0^{(\ln a)^{-1}} a^x \, dx. \quad (3 \text{ Punkte})$$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion für

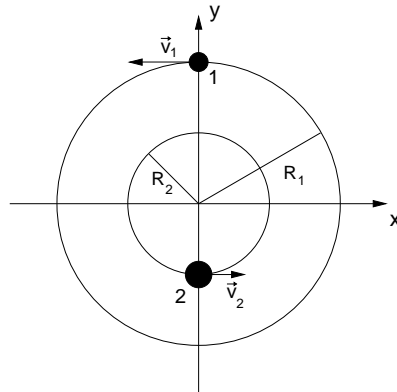
$$f(x) = \sum_{n=0}^m (n+1)! x^n. \quad (1 \text{ Punkt})$$

c) Die folgenden Integrale ergeben jeweils eine Funktion, die von dem Parameter  $x$  abhängt. Bestimmen Sie die Funktionen  $f_i(x)$ .

$$f_1(x) = \int_0^1 e^{-xy} \, dy, \quad f_2(x) = \int_{-x}^{2x} ((x')^2 + (x')^3) \, dx'. \quad (2 \text{ Punkte})$$

### Aufgabe 3: Zwei-Körper-Problem

(8 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Zwei-Körper-Problem, bei dem sich zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2 = 2m_1$  auf Kreisbahnen mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  um den Ursprung bewegen. Der Schwerpunkt des Zwei-Körper-Systems befindet sich für alle Zeiten bei  $\vec{r} = \vec{0}$ . Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für die beiden Körper jeweils konstant,  $|\vec{v}_i(t)| = v_i$ .

- Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Verhältnisse  $R_1/R_2$  und  $v_1/v_2$ . (2 Punkte)
- Geben Sie die Bahnen  $\vec{r}_i(t)$  der beiden Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit  $t = 0$ . (2 Punkte)
- Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kräfte  $\vec{F}_{12}$  und  $\vec{F}_{21}$  aufgrund der Gravitationskraft, die die beiden Körper aufeinander ausüben. (2 Punkte)
- Wie groß müssen die Geschwindigkeiten  $v_i$  sein, damit die beiden Körper auf ihren Kreisbahnen bleiben. Stimmt das resultierende Verhältnis  $v_1/v_2$  mit dem aus Teilaufgabe a) überein? (2 Punkte)

### Aufgabe 4: Teilchen im Kraftfeld

(5 Punkte)

Der Körper 1 mit Masse  $m_1 = 1$  bewegt sich auf der Bahn

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Auf den Körper wirkt die Gravitationskraft des Körpers 2 (mit Masse  $m_2 = 1$ ), der sich fest am Ursprung befindet:  $\vec{r}_2(t) = \vec{0}$ .

- Berechnen Sie die Kraft  $\vec{F}(t)$  aufgrund der Gravitationskraft, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt. (2 Punkte)
- Zeichnen Sie die Bahn  $\vec{r}_1(t)$  in ein zweidimensionales Koordinatensystem, sowie die Vektoren  $\vec{F}(t_n)$  für die Zeiten  $t_n = 0, 1, 2, 3$  als Pfeile ausgehend von den Orten  $\vec{r}_1(t_n)$ . Setzen Sie dazu die Gravitationskonstante  $G = 10$ . (3 Punkte)