

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 6: Abgabetermin: Mittwoch, der 30.11.2016, 10:00

Aufgabe 1: Integration

(6 Punkte)

- a) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_1^a x^m \ln(x) \, dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

- b) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe der Substitution $x = a \sin(\alpha)$ (α ist die Substitutionsvariable):

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

- c) Das folgende Integral ergibt eine Funktion, die von dem Parameter x abhängt. Berechnen Sie $f(x)$ mit Hilfe partieller Integration.

$$f(x) = \int_0^x t \sin(xt) \, dt . \quad (2 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 2: skalare Felder

(10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$ ($i = 1, 2$) mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2 + 1} .$$

- a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$, also die Linien mit $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$, für eine sinnvolle Auswahl an φ_n . (4 Punkte)

Gegeben sei nun das skalare Feld $V(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y) .$$

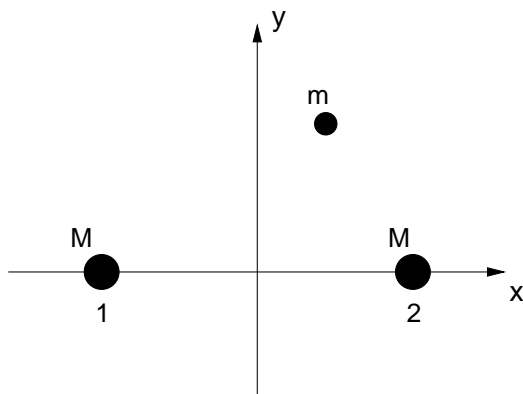
- b) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ist $V(\vec{r})$ maximal bzw. minimal? (2 Punkte)
- c) Im Limes $x \rightarrow 0$ gilt näherungsweise $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$. Führen Sie eine entsprechende Näherung in $V(\vec{r})$ durch und skizzieren Sie die Höhenlinien des genäherten skalaren Felds $\tilde{V}(\vec{r})$. (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie, dass die Geraden $y = (2n + 1)\pi \pm x$ ($n \in \mathbb{Z}$) Höhenlinien des Potentials mit $V(\vec{r}) = 0$ sind. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Vektorfelder

(6 Punkte)

Wie in der Abbildung dargestellt, befinden sich zwei Körper (Masse jeweils M) fest an den Orten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (a > 0).$$



- Wie lautet das Kraftfeld (Gravitationsfeld) $\vec{F}(\vec{r})$, das diese beiden Körper auf einen dritten Körper (Masse m) am Ort \vec{r} ausüben? (2 Punkte)
- Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)
- Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. (1 Punkt)
- Skizzieren Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$. (2 Punkte)