

**Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)**

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

**Blatt 9:** Abgabetermin: Mittwoch, der 21.12.2016, 10:00

**Aufgabe 1: Drehimpulserhaltung**

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Teilchens auf der Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Drehimpuls  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für eine beschleunigte Bewegung der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} t^2 \vec{g}$$

der Drehimpuls  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  keine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

**Aufgabe 2: Drehimpuls**

(3 Punkte)

Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch  $\vec{r}(t)$ , der Drehimpuls  $\vec{l}(t)$  werde relativ zum Bezugspunkt  $\vec{r}_0 = \vec{0}$  bestimmt. Der Vektor  $\vec{r}(t)$  überstreicht in der Zeit  $t$  die Fläche  $A(t)$ . Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Fläche nach der Zeit gilt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} .$$

**Aufgabe 3: zweidimensionales periodisches Potential**

(4 Punkte)

Betrachten Sie das zweidimensionale periodische Potential

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y)$$

und das zugehörige Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ .

a) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{a}, C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix} \quad ,$$

durch explizite Auswertung des Integrals entlang des Wegs  $C = C_1 + C_2$  mit  $C_1: y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi; C_2: x = 2\pi, 0 \leq y \leq \pi$ . (3 Punkte)

b) Vergleichen Sie das Ergebnis auf Teilaufgabe a) mit der Differenz der Stammfunktion (dem Potential) an den Punkten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . (1 Punkt)

#### Aufgabe 4: Wegintegral, Arbeit

(4 Punkte)

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die von der Kraft  $\vec{F}$  entlang der Wege  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) geleistete Arbeit  $\Delta A_i$  mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a}, C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0, 0, 0) \quad , \quad \vec{b} = (1, 1, 1) .$$

Dabei sind die Wege  $C_i$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad \vec{r}(t) = (t, t, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 &: \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

#### Aufgabe 5: Wegintegrale

(6 Bonuspunkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie für dieses Kraftfeld die Arbeit  $W$  entlang der beiden geschlossenen Wege  $C_1$  und  $C_2$  (siehe Abbildung).

