Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 1: Abgabetermin: Mittwoch, der 18.10.2017, 10:00

Aufgabe 1: eindimensionale Bewegung

(6 Punkte)

Die eindimensionale Bewegung eines Körpers der Masse m wird durch folgende Bahn $x_b(t)$ beschrieben:

$$x_b(t) = \begin{cases} -t & : \quad t < -b \ , \\ \frac{b}{2} + \frac{t^2}{2b} & : \quad -b \leq t \leq b \ , \\ t & : \quad t > b \ . \end{cases}$$

(Für den Parameter b gilt: $b > 0$.)

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v_b(t)$ und die Beschleunigung $a_b(t)$ des Körpers. Skizzieren Sie die Funktionen $x_b(t)$, $v_b(t)$ und $a_b(t)$. (3 Punkte)

b) Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung, $F(t) = ma(t)$, lässt sich die Kraft $F_b(t)$ berechnen, die auf einen Körper mit der Bahn $x_b(t)$ wirkt. Skizzieren Sie $F_b(t)$ für verschiedene Werte von b. Was folgt für die Funktion $F_b(t)$ im Limes $b \to 0$? (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_b(t) \mathrm{d}t$$

unabhängig von b ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Funktionen; Ableitung

(6 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und deren erste Ableitungen:

a)

$$f_1(x) = (x+1)(x-2)$$

b)

$$f_2(x) = \exp(-(x-1)^2)$$

c)

$$f_3(x) = 1 + \sin^2(x)$$

d)

$$f_4(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Hinweis: eine Kurvendiskussion (d.h. die Bestimmung der Nullstellen, der Extremwerte, des asymptotischen Verhaltens für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ und der Symmetrien der Funktionen) ist zwar nützlich aber hier nicht erforderlich.

Aufgabe 3: Differentiation

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen bezüglich x:

a)

$$g_1(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N = \sum_{n=1}^{N} x^n$$

b)

$$g_2(x) = x \sin^2(x) + x \cos^2(x)$$

c)

$$g_3(x) = (x + 1)(x - 1)$$

d)

$$g_4(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2$$

e)

$$g_5(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)$$

Hinweis: in manchen Fällen ist es nützlich, die Funktion *vor* dem Differenzieren zu vereinfachen.

Aufgabe 4: höhere Ableitungen

(3 Punkte)

Die n-te Ableitung der Funktion $f(x)$: $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, mit $n \in \mathbb{N}$, ist definiert über

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) \ .$$

Bestimmen Sie *alle* Ableitungen $g_1^{(n)}(x)$ (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$) der Funktion $g_1(x)$ aus Aufgabe 3a) mit $N = 4$.