Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 10: Abgabetermin: Mittwoch, der 20.12.2017, 10:00

Aufgabe 1: Differentialgleichungen – Linearkombinationen

(5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\mathrm{I}: \quad f(x) + f''(x) = 0 \ ,$$

$$\mathrm{II}: \quad f(x) + f''(x) = 1 \ ,$$

$$\mathrm{III}: \quad (f(x))^2 + f''(x) = 0 \ .$$

Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ jeweils Lösungen dieser Differentialgleichungen sind ($g(x)$ und $h(x)$ sollen nicht bestimmt werden). Im folgenden werden Linearkombinationen der Form

$$f(x) = ag(x) + bh(x) \ , \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass diese Linearkombination für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung I ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie (ebenfalls durch Einsetzen), dass diese Linearkombination im allgemeinen keine Lösung der Differentialgleichungen II und III ist. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Differentialgleichungen – Anfangsbedingungen

(8 Punkte)

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $kx(t) = m\ddot{x}(t)$ $(k > 0)$ hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} \ , \ \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

a) Geben Sie a und b (und damit $x(t)$) in Abhängigkeit von x_0 und v_0 an. (1 Punkt)

b) Im folgenden wird $x_0 = 1$ gesetzt. Für welche Werte von v_0 gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, 0 bzw. ∞? (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bahn $x(t)$ für $v_0 = -2\lambda, -\lambda, 0$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit von kinetischer und potentieller Energie für $x_0 = 1$ und beliebige v_0. Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ eine Erhaltungsgröße ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

(4 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der allgemeinen Form:

$$y'(x) + \frac{p(x)}{q(y)} = 0 \ .$$

a) Leiten Sie mit Hilfe der Separation der Variablen die folgende (implizite) Form für die Lösung $y(x)$ her:

$$Q(y) = -P(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Dabei ist $Q(y)$ eine Stammfunktion zu $q(y)$ und $P(x)$ eine Stammfunktion zu $p(x)$. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie jetzt die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x^2}{y} = 0 \ .$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Lösungswegs aus Teilaufgabe a) die Lösungen $y(x)$. (2 Punkte)