Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

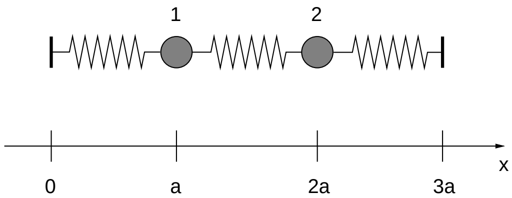
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 12: Abgabetermin: Mittwoch, der 17.01.2018, 10:00

Aufgabe 1: zwei gekoppelte Oszillatoren

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensionale System aus 2 Körpern (jeweils mit Masse m), die über Federn (jeweils mit Federkonstante k) untereinander und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = 3a$ verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ ($n = 1, 2$) und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1(t) &= -2k\xi_1(t) + k\xi_2(t) \ , \\ m\ddot{\xi}_2(t) &= k\xi_1(t) - 2k\xi_2(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

Dieses System zweier gekoppelter Differentialgleichungen hat die folgende allgemeine Lösung ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass diese Auslenkungen die gekoppelten Differentialgleichungen lösen. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Bahnen der beiden Körper, also $x_1(t)$ und $x_2(t)$, für die Anfangsbedingungen

$$x_1(t=0) = \frac{3}{2}a \ , \ x_2(t=0) = 2a \ , \ \dot{x}_1(t=0) = 0 \ , \ \dot{x}_2(t=0) = 0 \ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2: Taylorentwicklung

(3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^4 (explizit durch Berechnung der Ableitungen $f^{(n)}(x = 0)$). (2 Punkte)

b) Die Taylorreihe von $\exp(-x^2)$ lässt sich auch über die bekannte Taylorreihe der Funktion $g(y) = \exp(y)$ bestimmen: $f_{\mathrm{T}}(x) = g_{\mathrm{T}}(-x^2)$. Was ergibt sich damit für die vollständige Taylorreihe? (1 Punkt)

Aufgabe 3: gedämpfte Schwingung

(7 Punkte)

Gegeben sei die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m an einer Feder (Federkonstante k) mit zusätzlicher Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(\dot{x}) = -\bar{\gamma}\dot{x}$:

$$kx(t) + \bar{\gamma}\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = 0 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass im aperiodischen Grenzfall $\gamma = \omega$ (mit $\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{2m}$, $\omega = \sqrt{k/m}$) die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\gamma t} \ , \quad a_i \in \mathbb{R} \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Welche Lösungen ($x_1(t)$ oder $x_2(t)$, siehe Vorlesungsskript) dominieren in den Fällen $\gamma = \omega$ und $\gamma > \omega$ für große Zeiten t? (2 Punkte)

Im Folgenden wird $k = 1$ und $m = 1$ gesetzt. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

c) Wie lauten die Lösungen $x(t)$ für diese Anfangsbedingungen jeweils für $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$. (3 Punkte)

Aufgabe 4: komplexe Zahlen – Multiplikation

(3 Punkte)

Die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 sind gegeben durch

$$z_1 = 1 + i \ , \quad z_2 = -2 + 2i \ , \quad z_3 = -i \ .$$

a) Berechnen Sie die komplexen Zahlen $p_j = iz_j$ $(j = 1, 2, 3)$ ... (1 Punkt)

b) ... und $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)z_j$ $(j = 1, 2, 3)$. (1 Punkt)

c) Zeichnen Sie die z_j, p_j und q_j in der komplexen Ebene. Welche anschauliche Bedeutung ergibt sich daraus für die Multiplikation der z_j mit i bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$? (1 Punkt)