Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 13: Abgabetermin: Mittwoch, der 24.01.2018, 10:00

Aufgabe 1: : komplexe Zahlen – Division

(3 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)
$$\frac{1}{1-i}\ ,$$

b)
$$\frac{1+i}{(2-i)^2}\ ,$$

c)
$$\frac{i-2}{2+e^{i\pi/4}}\ .$$

Aufgabe 2: komplexe Zahlen – $e^{i\varphi}$

(6 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a) $2e^{-3i\pi/4}$, b) $ie^{\pi i}$, c) $e^{n\pi i}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = re^{i\varphi}$:

d) $2-2i$, e) $(-1)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, f) $(1+i)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Aufgabe 3: Additionstheorem

(2 Punkte)

Stellen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ein Additionstheorem für $\sin(3\varphi)$ auf, d.h. stellen Sie $\sin(3\varphi)$ durch eine Kombination aus $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dar.

Aufgabe 4: δ-Funktion – Funktionenfolgen

(4 Punkte)

Die δ-Funktion lässt sich definieren als Limes einer Funktionenfolge $f_n(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ , \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad |x| < \frac{1}{2n} \ , \\ 0 & : \quad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Im Folgenden soll die Gültigkeit einiger Rechenregeln für die δ-Funktion in dieser Darstellung und für die Funktion $g(x) = a + bx^2$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ gezeigt werden.

a) Zeigen Sie, durch explizite Berechnung der Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_n(x) \mathrm{d}x$ und anschließender Limesbildung ($\lim_{n\to\infty}$), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x) \, \mathrm{d}x = g(0) \ . \tag{1}$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie analog, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(\alpha x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{|\alpha|} g(0) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ . \tag{2}$$

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie (ebenfalls analog), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0) \, \mathrm{d}x = g(x_0) \ . \tag{3}$$

(1 Punkt)