Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

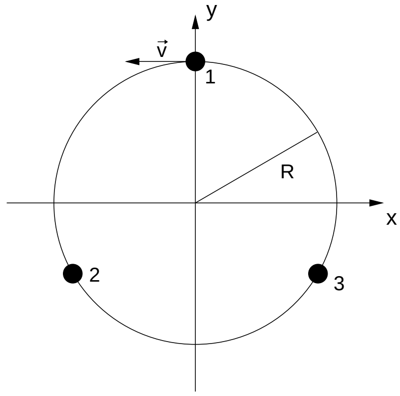
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 4: Abgabetermin: Mittwoch, der 08.11.2017, 10:00

Aufgabe 1: Drei-Körper-Problem

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen $m_i = m$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v$, die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

a) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ der drei Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit $t = 0$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kraft $\vec{F}$ auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird. Dabei ist die Gravitationskraft gegeben durch:
$$\vec{F}_{ij} = -Gm_im_j\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \ .$$
(2 Punkte)

c) Wie groß muss v sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius R bleibt? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Teilchenbahnen in Polarkoordinaten

(3 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden durch die Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ gegebenen Teilchenbahnen in der x-y-Ebene:

a) $r(t) = 2t$, $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $r(t) = 1$, $\varphi(t) = t^2$, $\sqrt{\pi} \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.

c) $r(t) = \frac{1}{2}t^2$, $\varphi(t) = \frac{3\pi}{2}$, $0 \leq t \leq 2$.

Aufgabe 3: Integration

(5 Punkte)

a) Zeigen Sie geometrisch, dass für die folgenden bestimmten Integrale gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x = 0\ .$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \pi\ .$$

b) Berechnen Sie:

$$\int_{0}^{1} \left(e^x + e^{2x}\right)\ \mathrm{d}x\ .$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{N} x^n\right) \mathrm{d}x\ .$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Hinweis zur Bestimmung der Stammfunktion von $\sin(x)\cos(x)$: Betrachten Sie die Ableitung von $\sin^2(x)$.