

## Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

**Blatt 5:** Abgabetermin: Mittwoch, der 15.11.2017, 10:00

### Aufgabe 1: Newtonsche Dynamik

(4 Punkte)

Ein Körper der Masse  $m$  befindet sich zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $\vec{r}(0) = \vec{0}$ ; für die Geschwindigkeit gilt  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ . Auf den Körper wirkt die folgende zeitabhängige Kraft  $\vec{F}(t)$ :

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} f\vec{e}_x & : 0 < t \leq 1, \\ \vec{0} & : 1 < t \leq 2, \\ f\vec{e}_y & : 2 < t \leq 3, \\ \vec{0} & : t > 3. \end{cases}$$

( $f > 0$ ;  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  sind die Einheitsvektoren in  $x$  bzw.  $y$ -Richtung.) Berechnen Sie  $\vec{r}(t)$  und  $\vec{v}(t)$  für alle  $t > 0$ .

### Aufgabe 2: Integration

(5 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx, \quad \int_0^{(\ln a)^{-1}} a^x dx. \quad (2 \text{ Punkte})$$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion für

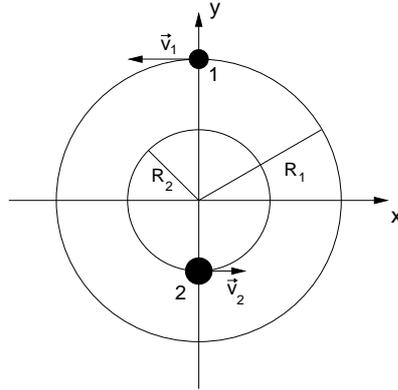
$$f(x) = \sum_{n=0}^m (n+1)! x^n. \quad (1 \text{ Punkt})$$

c) Die folgenden Integrale ergeben jeweils eine Funktion, die von dem Parameter  $x$  abhängt. Bestimmen Sie die Funktionen  $f_i(x)$ .

$$f_1(x) = \int_0^1 e^{-xy} dy, \quad f_2(x) = \int_{-x}^{2x} ((x')^2 + (x')^3) dx'. \quad (2 \text{ Punkte})$$

### Aufgabe 3: Zwei-Körper-Problem

(4 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Zwei-Körper-Problem, bei dem sich zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2 = 2m_1$  auf Kreisbahnen mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  um den Ursprung bewegen. Der Schwerpunkt des Zwei-Körper-Systems befindet sich für alle Zeiten bei  $\vec{R}_s = \vec{0}$ . Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für die beiden Körper jeweils konstant,  $|\vec{v}_i(t)| = v_i$ .

- Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Verhältnisse  $R_1/R_2$  und  $v_1/v_2$ .  
(2 Punkte)
- Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kräfte  $\vec{F}_{12}$  und  $\vec{F}_{21}$  aufgrund der Gravitationskraft, die die beiden Körper aufeinander ausüben. (2 Punkte)

### Aufgabe 4: Teilchen im Kraftfeld

(2 Punkte)

Der Körper 1 mit Masse  $m_1 = 1$  bewegt sich auf der Bahn

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Auf den Körper wirkt die Gravitationskraft des Körpers 2 (mit Masse  $m_2 = 1$ ), der sich fest am Ursprung befindet:  $\vec{r}_2(t) = \vec{0}$ . Berechnen Sie die Kraft  $\vec{F}(t)$  aufgrund der Gravitationskraft, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt.