Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

Blatt 6: Abgabetermin: Mittwoch, der 22.11.2017, 10:00

Aufgabe 1: Integration

(6 Punkte)

a) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_1^a x^m \ln(x)\, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe der Substitution $x = a\sin(\alpha)$ (α ist die Substitutionsvariable):

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

c) Das folgende Integral ergibt eine Funktion, die von dem Parameter x abhängt. Berechnen Sie $f(x)$ mit Hilfe partieller Integration.

$$f(x) = \int_0^x t\sin(xt)\, \mathrm{d}t \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 2: skalare Felder

(4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$ $(i = 1, 2)$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy \ , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2+1} \ .$$

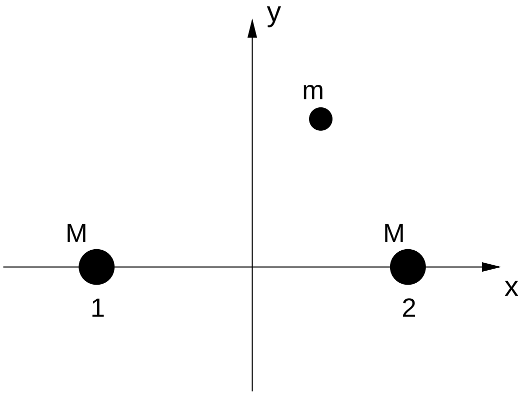
Skizzieren Sie die Höhenlinien der skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$, also die Linien mit $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$, für eine sinnvolle Auswahl an φ_n.

Aufgabe 3: Vektorfelder

(4 Punkte)

Wie in der Abbildung dargestellt, befinden sich zwei Körper (Masse jeweils M) fest an den Orten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad (a > 0) \ .$$



a) Wie lautet das Kraftfeld (Gravitationsfeld) $\vec{F}(\vec{r})$, das diese beiden Körper auf einen dritten Körper (Masse m) am Ort $\vec{r}$ ausüben?

b) Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

d) Skizzieren Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$.

Aufgabe 4: partielle Ableitungen

(3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion:

$$g(x, y, z) = x^2 \sin(xz) + ze^y \ .$$

Zeigen Sie explizit, dass die gemischten zweiten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die Ableitungen durchgeführt werden, also:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \ , \ \ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \ , \ \ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \ .$$