

**Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)**

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

**Blatt 7:** Abgabetermin: Mittwoch, der 29.11.2017, 10:00

**Aufgabe 1: Gradientenfelder**

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder der folgenden skalaren Felder ( $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ):

a)

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy .$$

b)

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2 + 1} .$$

c)

$$\varphi_3(\vec{r}) = \cos(x) \cos(y) \cos(z) .$$

d)

$$\varphi_4(\vec{r}) = r^n , \text{ mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} .$$

**Aufgabe 2: Potential des Schwerfelds**

(2 Punkte)

Für das Schwerfeld der Erde gilt näherungsweise die folgende Form für das Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} , \text{ mit } \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} .$$

Wie lautet das entsprechende Potential?

### Aufgabe 3: Kraftfeld und Potential

(4 Punkte)

Gegeben sei das Potential  $V(\vec{r})$  mit  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ :

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y) .$$

- Bestimmen Sie das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ .
- Für welche  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  ist das Potential maximal bzw. minimal?
- Für welche  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ ?
- Zeigen Sie, dass die Geraden  $y = (2n + 1)\pi \pm x$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) Höhenlinien des Potentials mit  $V(\vec{r}) = 0$  sind.

### Aufgabe 4: Produktregel für vektorwertige Funktionen

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Skalarprodukts bzw. des Vektorprodukts zweier vektorwertiger Funktionen  $\vec{a}(t)$  und  $\vec{b}(t)$  (mit den Komponenten  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $i = x, y, z$ ) die folgenden Produktregeln gelten:

a)

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{a}(t) \times \vec{b}(t) \right) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t) . \quad (2 \text{ Punkte})$$

b)

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) \right) = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) . \quad (1 \text{ Punkt})$$

### Aufgabe 5: $N$ -Teilchen-System – innere Kräfte

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein  $N$ -Teilchen-System mit inneren Kräften  $\vec{F}_{ij}$  zwischen Teilchen  $i$  und  $j$  gilt:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0} .$$