Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2017/18

**Blatt 8**: Abgabetermin: Mittwoch, der 06.12.2017, 10:00

## Aufgabe 1: Drehimpulserhaltung

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Teilchens auf der Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für eine beschleunigte Bewegung der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} t^2 \vec{g}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ im Allgemeinen *keine* Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

## Aufgabe 2: Drehimpuls

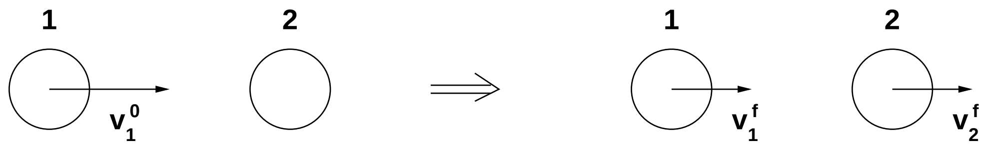
(3 Punkte)

Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in der Zeit $t$ die Fläche $A(t)$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Fläche nach der Zeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \ .$$

## Aufgabe 3: elastischer Stoß

(6 Punkte)

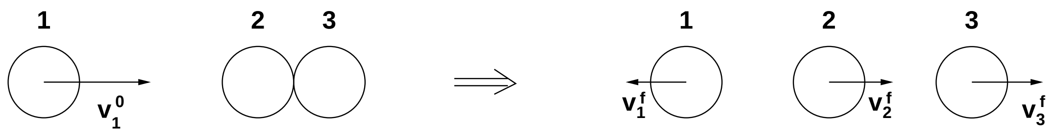



Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Stoßprozess: Teilchen 1 (Masse $m_1$, Geschwindigkeit $v_1^0$) trifft auf das ruhende Teilchen 2 (Masse $m_2$, Geschwindigkeit $v_2^0 = 0$); nach dem Stoß haben die beiden Teilchen die Geschwindigkeiten $v_1^{\mathrm{f}}$ und $v_2^{\mathrm{f}}$.

a) Berechnen Sie (unter der Annahme, dass Gesamtimpuls und Gesamtenergie des Systems erhalten sind) die Geschwindigkeiten $v_1^{\mathrm{f}}$ und $v_2^{\mathrm{f}}$. (3 Punkte)

b) Was ergibt sich für den Fall $m_1 = m_2$? (1 Punkt)

Betrachten Sie jetzt den in der zweiten Abbildung dargestellten Stoßprozess mit drei Teilchen (Massen $m_i = m$, $v_2^0 = v_3^0 = 0$):




c) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Endzustände mit den Erhaltungssätzen verträglich sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad & v_1^{\mathrm{f}} = v_2^{\mathrm{f}} = 0 \ , \ v_3^{\mathrm{f}} = v_1^0 \ , \\ \mathrm{II}: \quad & v_1^{\mathrm{f}} = -\frac{1}{3} v_1^0 \ , \ v_2^{\mathrm{f}} = v_3^{\mathrm{f}} = \frac{2}{3} v_1^0 \ . \quad \text{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

## Aufgabe 4: zweidimensionales periodisches Potential - Wegintegral

(4 Punkte)

Betrachten Sie das zweidimensionale periodische Potential

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y)$$

und das zugehörige Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$.

a) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{a},C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix} \ ,$$

durch explizite Auswertung des Integrals entlang des Wegs $C = C_1 + C_2$ mit $C_1$: $y = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$; $C_2$: $x = 2\pi$, $0 \leq y \leq \pi$. (3 Punkte)

b) Vergleichen Sie das Ergebnis auf Teilaufgabe a) mit der Differenz der Stammfunktion (dem Potential) an den Punkten $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (1 Punkt)