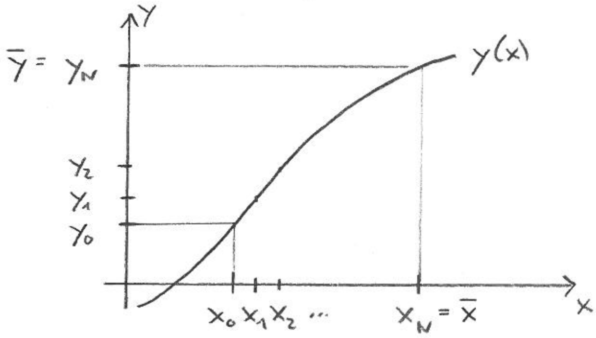
Separation der Variablen

gesucht sind die Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\boxed{y'(x) + p(x)\,y(x) = 0} \quad (*)$$

die Funktion $p(x)$ ist gegeben

$\longrightarrow$ Diskretisierung der x-Werte von x_0 bis x_N mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, \dots, N-1$



$$\longrightarrow \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, \dots N$$

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, \dots, N-1 \\ &= y(x_{i+1}) - y(x_i) \\ &= y(x_i + \Delta x_i) - y(x_i) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Dgl. $(*)$ für $x = x_i$: $\quad y'(x_i) + p(x_i)\underbrace{y(x_i)}_{= y_i} = 0$

$\longrightarrow$ Näherung für die Ableitung: $\quad y'(x_i) \approx \dfrac{y(x_i + \Delta x_i) - y(x_i)}{\Delta x_i} = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = -p(x_i)\,y_i$$

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = -p(x_i)\,\Delta x_i \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{y_i}\,\Delta y_i}_{} = -\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} p(x_i)\,\Delta x_i}_{}$$

Riemann-Summe für das Integral $\displaystyle\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{1}{y}\,dy$

Riemann-Summe für das Integral $\displaystyle\int_{x_0}^{\bar{x}} p(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \quad \ln(\bar{y}) - \ln(y_0) = P(x_0) - P(\bar{x})$$

setze $\bar{x} = x$

$\bar{y} = y(\bar{x}) = y(x)$

$$\boxed{y(x) = c\,e^{-P(x)}}$$