

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2018/19

Blatt 10: Abgabetermin: Mittwoch, der 19.12.2018, 10:00

Aufgabe 1: Differentialgleichungen – Lösung durch Einsetzen

(6 Punkte)

Gegeben sind die folgenden drei Differentialgleichungen:

$$\text{I : } f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 0 ,$$

$$\text{II : } 4f''(x) + 2f'(x) - 2f(x) = 0 ,$$

$$\text{III : } f'(x) - 2xf(x) = 0 .$$

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen einer oder mehrerer dieser Differentialgleichungen?

$$f(x) = e^{(x^2)} , f(x) = ae^{(\frac{x}{2})} + be^{(-x)} \quad (a, b \in \mathbb{R}) , f(x) = e^{(x^2+x)} .$$

Aufgabe 2: Klassifizierung von Differentialgleichungen

(4 Punkte)

Gegeben sind folgende Differentialgleichungen:

$$\text{I : } \frac{d^2f}{dx^2} + t \frac{df}{dx} + 2 = 0 , \quad \text{II : } \frac{\partial f}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 ,$$

$$\text{III : } \frac{d^3x}{dt^3} + t^4 \frac{dx}{dt} - x(t) = 0 , \quad \text{IV : } (f(x))^4 + \frac{df}{dx} x = 0 .$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- gewöhnlich/partiell,
- linear/nicht-linear,
- homogen/nicht homogen,
- konstante/nicht-konstante Koeffizienten.

Von welcher Ordnung sind die Differentialgleichungen jeweils?

Aufgabe 3: Differentialgleichungen – Linearkombinationen

(5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\text{I: } f(x) + f''(x) = 0 ,$$

$$\text{II: } f(x) + f''(x) = 1 ,$$

$$\text{III: } (f(x))^2 + f''(x) = 0 .$$

Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ jeweils Lösungen dieser Differentialgleichungen sind ($g(x)$ und $h(x)$ sollen nicht bestimmt werden). Im folgenden werden Linearkombinationen der Form

$$f(x) = ag(x) + bh(x) , \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} ,$$

betrachtet.

- Zeigen Sie durch Einsetzen, dass diese Linearkombination für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung I ist. (2 Punkte)
- Zeigen Sie (ebenfalls durch Einsetzen), dass diese Linearkombination im allgemeinen keine Lösung der Differentialgleichungen II und III ist. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Differentialgleichungen – Anfangsbedingungen

(8 Punkte)

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $kx(t) = m\ddot{x}(t)$ ($k > 0$) hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} , \quad \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

- Geben Sie a und b (und damit $x(t)$) in Abhängigkeit von x_0 und v_0 an. (1 Punkt)
- Im folgenden wird $x_0 = 1$ gesetzt. Für welche Werte von v_0 gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty, 0$ bzw. ∞ ? (2 Punkte)
- Skizzieren Sie die Bahn $x(t)$ für $v_0 = -2\lambda, -\lambda, 0$. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit von kinetischer und potentieller Energie für $x_0 = 1$ und beliebige v_0 . Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ eine Erhaltungsgröße ist. (3 Punkte)