Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2018/19

Blatt 2: Abgabetermin: Mittwoch, der 24.10.2018, 10:00

Aufgabe 1: Kinematik von Massenpunkten

(8 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Bahnkurven für die Bewegung eines Massenpunkts in Dimension $d = 2$:

$$\vec{r}_1(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t\sin(\omega t) \\ t\cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad .$$

a) Skizzieren Sie jeweils die Komponenten $x_i(t)$ und $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ sowie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ in der zweidimensionalen Ebene. Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Bahnen für $t > 0$. Das Verhalten für $t < 0$ ergibt sich dann aufgrund der Symmetrie der Bahnkurven ($\vec{r}_i(-t) = \ldots$). (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ und die Beschleunigungen $\vec{a}_i(t)$ sowie deren Beträge $v_i(t) = |\vec{v}_i(t)|$ und $a_i(t) = |\vec{a}_i(t)|$. (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt die folgende Bahn in Dimension $d = 3$:

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix} \quad .$$

c) Skizzieren Sie diese dreidimensionale Bewegung. (2 Punkte)

Aufgabe 2: zweidimensionale Bahnen

(6 Punkte)

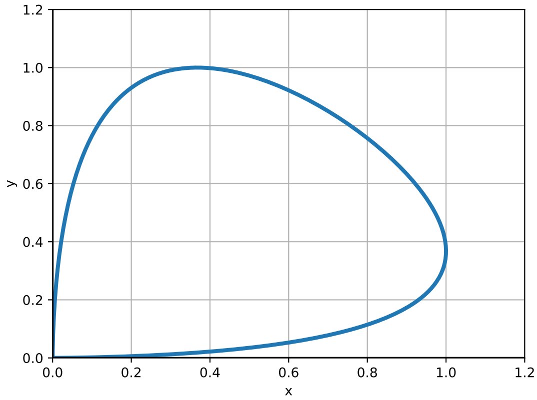
Gegeben sind die zweidimensionalen Bahnen in der Darstellung als vektorwertige Funktionen $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, 6$:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \exp(-t^2) \\ \exp(-(t-1)^2) \end{pmatrix} \quad ,$$

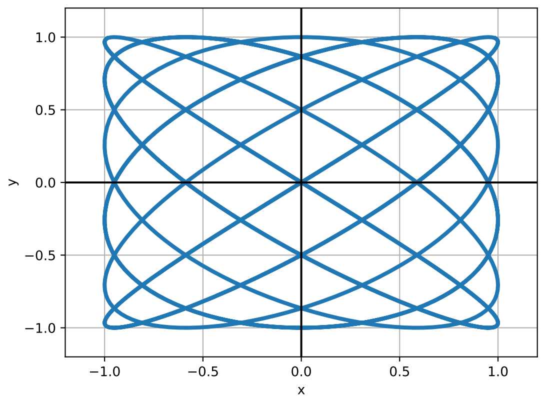
$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_4(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0.1t^4 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\vec{r}_5(t) = \begin{pmatrix} \sin(6t) \\ \cos(5t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_6(t) = \begin{pmatrix} \exp(-t^2) \\ \sqrt{1-\exp(-2t^2)} \end{pmatrix} \quad .$$

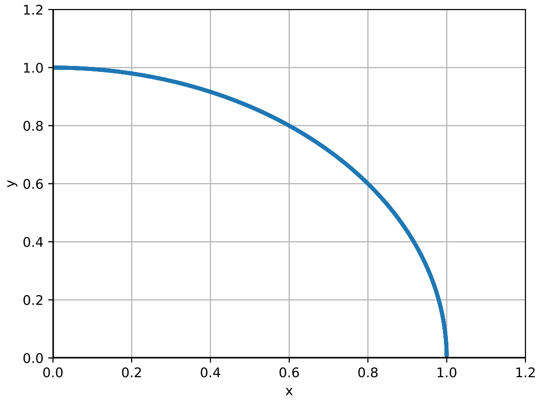
Welche der folgenden Bahnen werden durch die $\vec{r}_i(t)$ beschrieben? (Die Bahnen sind jeweils dargestellt für $-5 \leq t \leq 5$).



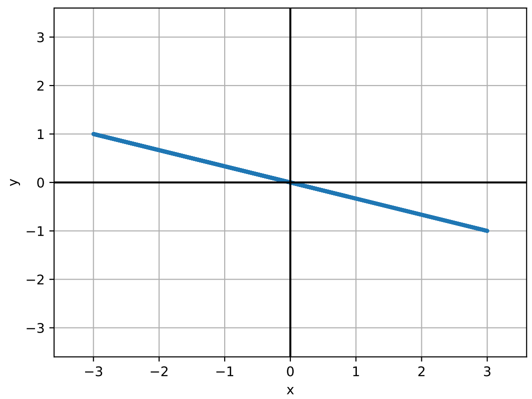
a)



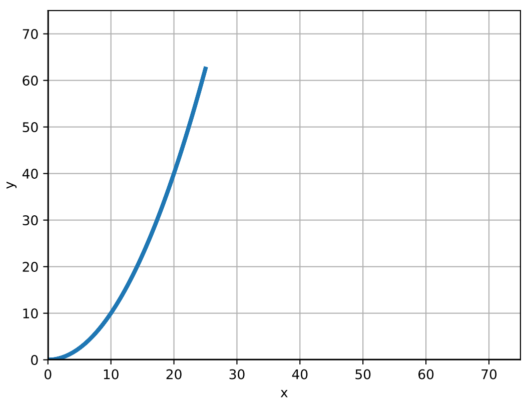
b)



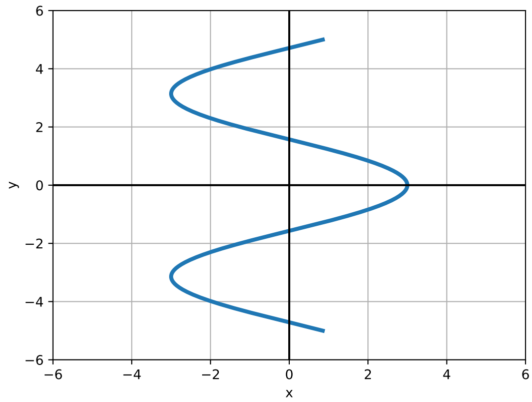
c)



d)



e)



f)

Aufgabe 3: Vektoren I

(7 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \quad ,$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie:

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$. (1 Punkt)

b) $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$. (1 Punkt)

c) $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ paarweise senkrecht aufeinander stehen. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Dreiecksungleichung $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

g) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{e}_i\right]$$

(1 Punkt)

Aufgabe 4: Vektoren II

(2 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $2\alpha\vec{u} + \frac{1}{4\alpha}(2\vec{v} - 8\alpha^2\vec{u})$ (1 Punkt)

b) $(\alpha + \beta)^2(\vec{u} + \vec{v}) + (\alpha - \beta)^2(\vec{u} - \vec{v}) + (\alpha^2 + \beta^2)(\vec{v} - \vec{u})$ (1 Punkt)

Dabei sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beliebige Vektoren und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.