Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2018/19

Blatt 7: Abgabetermin: Mittwoch, der 28.11.2018, 10:00

Aufgabe 1: partielle Ableitungen

(3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion:

$$g(x, y, z) = x^2 \sin(xz) + ze^y \ .$$

Zeigen Sie explizit, dass die gemischten zweiten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die Ableitungen durchgeführt werden, also:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \ .$$

Aufgabe 2: Gradientenfelder

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder der folgenden skalaren Felder ($\vec{r} \in \mathbb{R}^3$):

a)
$$\varphi_1(\vec{r}) = xy \ . \quad \text{(1 Punkt)}$$

b)
$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2 + 1} \ . \quad \text{(1 Punkt)}$$

c)
$$\varphi_3(\vec{r}) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) \ . \quad \text{(1 Punkt)}$$

d)
$$\varphi_4(\vec{r}) = r^n \ , \ \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: Potential des Schwerefelds

(2 Punkte)

Für das Schwerefeld der Erde gilt näherungsweise die folgende Form für das Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}\ ,\ \text{mit}\ \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}\ .$$

Wie lautet das entsprechende Potential?

Aufgabe 4: Kraftfeld und Potential

(6 Punkte)

Gegeben sei das Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y)\ .$$

a) Bestimmen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. (1 Punkt)

b) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ist das Potential maximal bzw. minimal? (2 Punkte)

c) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$? (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass die Geraden $y = (2n+1)\pi \pm x$ $(n \in \mathbb{Z})$ Höhenlinien des Potentials mit $V(\vec{r}) = 0$ sind. (2 Punkte)

Aufgabe 5: Produktregel für vektorwertige Funktionen

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Skalarprodukts bzw. des Vektorprodukts zweier vektorwertiger Funktionen $\vec{a}(t)$ und $\vec{b}(t)$ (mit den Komponenten $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = x, y, z$) die folgenden Produktregeln gelten:

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t)\ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)\right) = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t)\ . \qquad \text{(2 Punkte)}$$